

B. Fink.

1970

ZUR PROJEKTION SPURIOSER ZUSTÄNDE
AUS VIELTEILCHENFUNKTIONEN DES DEFORMIERTEN SCHALENMODELLS

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Johann Wolfgang Goethe - Universität

zu

Frankfurt am Main

Vorgelegt von

B e r n d F i n k

aus

Plauen / Vogtland

Dezember 1969



Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen
Fakultät der Universität Frankfurt am Main.

Dekan: Prof. Dr. G. Schneider

Erster Berichterstatter : Prof. Dr. W. Greiner

Zweiter Berichterstatter: Prof. Dr. M.G. Huber

Tag der mündlichen Prüfung:

1970

	Einleitung	1
I.1.	Die Projektion spurioser Schwerpunktszustände im Nilssonmodell	4
I.2.	Spuriose Schwerpunktsanteile in den Vielteilchenfunktionen des Nilssonmodells bei schweren deformierten Kernen und Vergleich mit leichten deformierten Kernen	8
II.1.	Die Projektion spurioser Rotationszustände nach der Methode von Scheid	10
II.2.	Betrachtung des axialsymmetrischen Falls in der Methode von Scheid	18
III.	Die Projektion spurioser Rotationsoszillationen bei Verwendung axialsymmetrischer Potentiale	20
IV.1.	Probleme der numerischen Behandlung des Projektionsverfahrens für spuriose Rotationszustände	33
IV.2.	Formulierung eines neuen Projektionsverfahrens für die Vielteilchenfunktionen des Nilssonmodells	46
IV.3.	Rechnungen mit den projizierten Vielteilchenfunktionen	59
	Zusammenfassung	61
	Anhänge	63
	Literaturverzeichnis	79

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

Die phänomenologischen Modelle der Kernphysik weisen einen entscheidenden Mangel auf: Sie verletzen bestimmte aus Erfahrung als gültig anerkannte Symmetrien¹⁾. Das sphärische Schalenmodell verletzt die Translationsinvarianz, die anisotropen Schalenmodelle zusätzlich die **Rotationsinvarianz**, der Quasiteilchenformalismus die Teilchenerhaltung.

Seit langem ist bekannt, daß die Anregungsspektren und Übergangswahrscheinlichkeiten dieser Modelle durch das Auftreten sogenannter spurioser Zustände verfälscht werden. Diese spuriosen Zustände haben kollektiven Charakter; sie entsprechen z.B. einer Translation oder Rotation des Kerns als Ganzem. Ihre Beibehaltung in den Eigenfunktionssystemen der Modelle führt zu einer Redundanz derselben und oft zu einer drastischen Beeinflussung der Anregungsspektren, insbesondere aber der Übergangswahrscheinlichkeiten. Daher sind Methoden zur Herausprojektion von Spuriositäten in der Theorie der Kernstruktur von großer Bedeutung.

Der Hamiltonoperator des Kerns, bestehend aus der kinetischen Energie des Vielnukleonensystems und einer Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung, ist translations- und rotationsinvariant. Er hat die maximale Anzahl der Freiheitsgrade des Kerns und beschreibt daher außer der inneren Bewegung des Nukleonensystems auch kollektive Bewegungen, wie freie Schwerpunktsbewegung und freie Rotationen. Wegen der Translationsinvarianz sind die Eigenfunktionen der Schwerpunktsbewegung ebene Wellen mit der Translationsenergie $\vec{P}^2/2M$, wobei $\vec{P}$ der Gesamtimpuls des Kerns, M seine Masse ist. Schalenmodellfunktionen aber sind lokalisierte Funktionen; ihnen entsprechen Wellenpakete der Schwerpunktsbewegung. Weil die Schalenmodellpotentiale die Translationsinvarianz verletzen, enthalten sie Rückstellpotentiale für die Schwerpunktsbewegung und verursachen dadurch Oszillationen des Schwerpunkts. In einer Basis von Schalenmodellfunktionen gehören nicht alle zur gleichen Translationsenergie; in ihnen kann die innere Bewegung des Nukleonensystems mit der kollektiven Schwerpunktsbewegung in unbekannter Weise vermischt sein.

Dieser Tatsache wurde sehr früh in der Kernphysik Beachtung geschenkt. Entsprechend groß ist die Zahl der Vorschläge zur Behandlung der spuriosen Schwerpunktsbewegung, von denen einige in Ref. 2) - 14) angegeben sind. Alle Methoden liefern im Fall harmonischer Oszillatorpotentiale übereinstimmende Ergebnisse und werden hier besonders einfach³⁾. Da bei den vorliegenden Untersuchungen über Spuriositäten in den Vielteilchenkonfigurationen des Nilssonmodells das Potential im wesentlichen ein Oszillatorpotential ist (außer $\vec{l}\vec{s}$ - und $\vec{l}^2$ -Term), wurde die Projektion der Schwerpunktsspuriositäten nur kurz behandelt. In Teil I der Arbeit befinden sich die dazu interessierenden Bemerkungen und Rechnungen.

Die Behandlung spurioser Rotationen wurde in der Kernphysik später in Angriff genommen. Es ist bekannt, daß im Bereich nicht abgeschlossener Schalen das selbstkonsistente Feld der Kerne nicht-sphärisch ist. Der zur Behandlung dieser Kerne verwendete anisotrope Schalenmodellhamiltonoperator beschreibt neben der inneren Bewegung des Nukleonensystems auch kollektive Rotationen (und die bereits besprochene Schwerpunktsbewegung), da er die maximale Anzahl der Freiheitsgrade des Kerns umfaßt. Da er jedoch nicht rotationsinvariant ist, enthält er Rückstellpotentiale für die Rotationen. Es handelt sich also nicht um freie Rotationen, sondern um an Gleichgewichtslagen gebundene Rotationen, sogenannte Rotationsoszillationen, bei denen der Kern als Ganzes gegenüber der festen Stellung des anisotropen Potentials Schwingungen ausführt. Jede Rotation des Kerns verändert das Potential so, daß rücktreibende Kräfte auftreten, die den Kern um die Gleichgewichtslage oszillieren lassen. Auf diese bedeutende Tatsache hat Lipkin^{15),16)} zuerst ausführlich hingewiesen.

Rotationsoszillationen und Schwerpunktsoszillationen sind eine Folge der Invarianzverletzungen des Schalenmodelloperators. Vielteilchenfunktionen eines anisotropen Schalenmodells enthalten daher spuriose Anteile der Rotations- und Schwerpunktsoszillationsbewegung. Sie beschreiben nicht nur die innere Bewegung des Nukleonensystems, sondern können sie in unbekannter Weise mit den kollektiven Bewegungen vermischen. Die Eigenfunktionssysteme solcher Operatoren sind redundant.

Verschiedene Vorschläge zur Beseitigung der spuriosen Rotationsanteile in den Wellenfunktionen sind gemacht worden. Eine Reihe von Arbeiten bezieht sich auf das von Hill und Wheeler¹²⁾ vorgeschlagene Verfahren der kontinuierlichen Variationsparameter, bei dem die Kollektivkoordinaten als kontinuierliche Parameter in den Satz der Vielteilchenwellenfunktionen eingeführt werden und durch integrale Superposition dieser Funktionen energetisch günstigere gebildet werden. Diese Verfahren bezwecken und erreichen keine Separation der inneren und der spuriosen Rotationsbewegung.

Andere Arbeiten beziehen sich auf das von Lipkin³⁾ vorgeschlagene Verfahren der redundanten Variablen. Die Ref. 18) - 21) weisen auf verschiedene Versuche der Beseitigung der Rotationsspuriositäten hin. Alle Methoden führen auf äußerst komplizierte Gleichungen, welche nur unter großem mathematischen Aufwand anwendbar sind. Die Ideen von Lipkin^{15), 16)} wurden von Scheid¹³⁾ und Scheid und Greiner¹⁴⁾ aufgegriffen und zu einer Theorie der Projektionen spurioser Rotationen ausgearbeitet. Im Teil II dieser Arbeit führen wir in die wesentlichen Gedankengänge der Theorie von Scheid ein und werden zeigen, daß sie in der so konzipierten Form nicht ohne weiteres auf axialsymmetrische Potentiale anwendbar ist. Teil III dieser Arbeit modifiziert diese Theorie so, daß sie für axialsymmetrische Potentiale verwendbar ist. In Teil IV bringen wir erste numerische Ergebnisse, welche zu dem Schluß führen, daß die bei der Scheid'schen Theorie verwendeten Diagonalisierungen prinzipiell schlecht konvergent sein müssen. Es erfolgt eine neuartige Formulierung der Projektion spurioser Rotationszustände für das Nilssonmodell mit ersten Ergebnissen.

I.1. Die Projektion spurloser Schwerpunktzustände im Nilssonmodell

Die Identifikation und Projektion spurloser Schwerpunktzustände wird bei Verwendung harmonischer Oszillatorpotentiale besonders einfach. Die Sonderstellung harmonischer Oszillatorpotentiale beruht auf ihrer Eigenschaft, Schwerpunktsbewegung und innere Bewegung des Nukleonensystems nicht zu koppeln. Eine Transformation auf Schwerpunkts- und innere Koordinaten läßt den Hamiltonoperator in zwei kommutierende Anteile separieren. Wir führen die neuen Koordinaten

$$x_i' = x_i - X \quad y_i' = y_i - Y \quad z_i' = z_i - Z \quad (\text{I.1})$$

ein, indem wir die Laborkoordinaten auf die Schwerpunktskoordinaten

$$X = \frac{1}{A} \sum_i x_i \quad Y = \frac{1}{A} \sum_i y_i \quad Z = \frac{1}{A} \sum_i z_i \quad (\text{I.2})$$

beziehen, wobei die x', y', z' identisch in (3A-3) inneren Koordinaten ξ_ν die Beziehungen

$$\sum_i x_i'(\xi_\nu) = \sum_i y_i'(\xi_\nu) = \sum_i z_i'(\xi_\nu) = 0 \quad (\text{I.3})$$

erfüllen. Der dreidimensionale anisotrope harmonische Oszillator, Hauptterm des Nilssonmodells, läßt sich in den neuen Koordinaten in folgender Weise aufspalten:

$$H = \sum_{i,a} \frac{p_{ia}^2}{2m} + \frac{m}{2} \sum_i (\omega_x^2 x_i^2 + \omega_y^2 y_i^2 + \omega_z^2 z_i^2) = \tilde{H}_{in} + \tilde{H}_{cm} \quad (\text{I.4})$$

$$\tilde{H}_{in} = \tilde{T}_{in}(\xi_\nu, \tilde{\pi}_\nu) + \frac{m}{2} \sum_i \{ \omega_x^2 x_i'^2(\xi_\nu) + \omega_y^2 y_i'^2(\xi_\nu) + \omega_z^2 z_i'^2(\xi_\nu) \}$$

$$\tilde{H}_{cm} = \frac{\vec{P}^2}{2Am} + \frac{mA}{2} (\omega_x^2 X^2 + \omega_y^2 Y^2 + \omega_z^2 Z^2)$$

Dabei sind die π_v die kanonisch konjugierten Impulse der q_v . Die Operatoren $\tilde{H}_{in}$ und $\tilde{H}_{cm}$, von denen der erste nur von den inneren Koordinaten und Impulsen (q_v, π_v) abhängt, der andere nur von den Schwerpunktskoordinaten und Impulsen $(\vec{R}, \vec{P})$ kommutieren miteinander. In $\tilde{H}_{cm}$ zeigen sich die im Nilssonmodell enthaltenen Rückstellpotentiale für den Schwerpunkt, welche in diesem Fall dem Schwerpunkt wieder eine einfache harmonische Bewegung zuweisen.

Ist $\chi_j(q_v)$ eine Eigenfunktion von $\tilde{H}_{in}$ zum Eigenwert ϵ_j ,

$$\tilde{H}_{in} \chi_j(q_v) = \epsilon_j \chi_j(q_v) \quad (I.5)$$

und $\varphi_\alpha(\vec{R})$ eine Eigenfunktion von $\tilde{H}_{cm}$ zum Eigenwert s_α ,

$$\tilde{H}_{cm} \varphi_\alpha(\vec{R}) = s_\alpha \varphi_\alpha(\vec{R}) \quad (I.6)$$

so ist die Produktfunktion

$$\Phi_{j,\alpha}(q_v, \vec{R}) = \chi_j(q_v) \varphi_\alpha(\vec{R}) \quad (I.7)$$

eine Eigenfunktion von $H(\vec{r}_i, \vec{p}_i) = \tilde{H}(q_v, \pi_v, \vec{R}, \vec{P}) = \tilde{H}_{in} + \tilde{H}_{cm}$ zum Eigenwert

$$E_{j,\alpha} = \epsilon_j + s_\alpha \quad (I.8)$$

$$(\tilde{H}_{in} + \tilde{H}_{cm}) \Phi_{j,\alpha}(q_v, \vec{R}) = E_{j,\alpha} \Phi_{j,\alpha}(q_v, \vec{R}) \quad (I.9)$$

Diagonalisieren wir daher den in Laborkoordinaten gegebenen Operator H aus (I.4) in einer in Laborkoordinaten gegebenen Basis, so erhalten wir Eigenfunktionen $\psi_n(\vec{r}_i)$ zum Eigenwert E_n welche folgende Struktur haben

$$\psi_n(\vec{r}_i) = \tilde{\psi}_n(q_v, \vec{R}) = \sum_{j,\alpha} a_{j,\alpha} \Phi_{j,\alpha}(q_v, \vec{R}) \quad (I.10)$$

wobei eine Superposition aller $\Phi_{j\alpha}$ auftreten kann, die bezüglich des Eigenwerts E_n entartet sind, die also $\epsilon_j + s_\alpha = E_n$ erfüllen. Die Matrixelemente von $\tilde{H}_{cm}(\vec{R}, \vec{p}) = H_{cm}(\vec{r}_c, \vec{p}_c)$ zwischen Zuständen ψ_n, ψ_m zu verschiedenen Eigenwerten $E_n \neq E_m$ verschwinden:

$$\langle \psi_n(\vec{r}_c) | H_{cm} | \psi_m(\vec{r}_c) \rangle = \sum_{j,\alpha} \sum_{j',\alpha'} a_{j\alpha}^* a_{j'\alpha'} \langle \chi_j(\xi_\nu) \varphi_\alpha(\vec{R}) | \tilde{H}_{cm} | \chi_{j'}(\xi_\nu) \varphi_{\alpha'}(\vec{R}) \rangle \quad (I.11)$$

$$= \sum_{j,\alpha} |a_{j\alpha}|^2 s_\alpha \delta_{jj'} \delta_{\alpha\alpha'} = \sum_{j,\alpha} |a_{j\alpha}|^2 s_\alpha \delta_{nm}$$

Diagonalisiert man daher den Operator H_{cm} in der Basis (I.10), so mischen nur die zu einem Eigenwert E_n entarteten Funktionen ψ_n . Die so gewonnenen Eigenfunktionen von H_{cm} , sind also weiterhin Eigenfunktionen zu H und damit auch zu $\tilde{H}_{cm}(\xi_\nu, \vec{p}_\nu) = H_{cm}(\vec{r}_c, \vec{p}_c)$. Sie sind daher mit den Funktionen (I.7) identisch, wobei $\chi_j(\xi_\nu)$ eine Überlagerung entarteter innerer Eigenfunktionen sein kann. Beschränkt man sich unter den Funktionen (I.7) auf die Klasse

$$\Phi_{j_0}(\vec{r}_c) = \Phi_{j_0}(\xi_\nu, \vec{R}) = \chi_{j_0}(\xi_\nu) \varphi_0(\vec{R}) \quad (I.12)$$

welche zum Grundzustand des Schwerpunktoszillators gehört, so gewinnt man einen nicht redundanten, vollständigen Satz orthonormaler Eigenfunktion von $H_{cm}(\vec{r}_c, \vec{p}_c)$ in Laborkoordinaten, der äquivalent dem Satz von Eigenfunktionen $\chi_j(\xi_\nu)$ zum inneren Hamiltonoperator $\tilde{H}_{in}(\xi_\nu, \vec{p}_\nu)$ ist. Zwar enthalten alle Funktionen einen Schwerpunktsanteil, aber alle in der gleichen, einfachen und bekannten Form $\varphi_0(\vec{R})$, die bei weiteren Rechnungen berücksichtigt werden kann^{13,14)}. In diesem Sinne sprechen wir von einer "Herausprojizierung spurloser Schwerpunkts-

zustände".

Interessiert man sich in einer Rechnung nur für das Niederenergiespektrum eines Kerns, so ist man oft in der glücklichen Lage, unter den Eigenfunktionen $\psi_n(\vec{r}_i)$ aus (I.10) zum Hamiltonoperator H , (I.4), nur solche zu finden, die zum Grundzustand des Schwerpunktsoszillators gehören und deshalb die Gestalt (I.12) besitzen, weil der Grundzustand nicht entartet ist. Alle Zustände bis zu einer maximalen Anregungsenergie E_{max} , welche der Ungleichung

$$E_{max} - E_0 < s_1 - s_0 \quad (I.13)$$

gehorschen, müssen auf Grund der Eigenwertgleichung (I.8) nämlich zum Grundzustand des Schwerpunktsoszillators gehören (gleiche Überlegungen werden bei dem Verfahren von Palumbo¹²⁾ angestellt).

E_0 bezeichnet die Grundzustandsenergie von H (da uns nur Relativenergien interessieren, wird $E_0 = 0$), s_0 und s_1 die Energie des Grundzustands und ersten angeregten Zustands von H_{cm} .

Bei Ergänzung des anisotropen harmonischen Oszillators (I.4) durch den $\vec{L}\vec{s}$ - und $\vec{L}^2$ -Term zum vollständigen Nilssonhamiltonoperator werden die obigen Überlegungen zunächst hinfällig. Transformiert man diese Terme auf innere Koordinaten und Schwerpunktskoordinaten, so ergeben sich Kopplungsterme zwischen der inneren und der Schwerpunktsbewegung, welche eine Separation der Wellenfunktionen nach (I.7) nicht mehr ermöglichen. Allerdings ist man bei schweren Kernen, da diese Terme den Faktor $1/A$ enthalten, in einer günstigen Lage: man kann hoffen, daß ihr Einfluß vernachlässigbar klein ist (siehe Teil II.2). Ein exakter, wenn auch nicht ganz unproblematischer Weg, da $\vec{L}\vec{s}$ - und $\vec{L}^2$ -Terme bereits optimal gewählt wurden, besteht in einer Ersetzung von $\vec{r}_i$ durch $\vec{r}_i' = \vec{r}_i - \vec{R}$ und entsprechend von $\vec{p}_i$ durch $\vec{p}_i' = \vec{p}_i - 1/A \vec{P}$, was auf $\vec{L}\vec{s}$ - und $\vec{L}^2$ -Terme führt, die nur noch von den inneren Koordinaten und Impulsen ($\vec{r}_i, \vec{p}_i$) abhängen. Diese neuen Operatoren lassen sich, da sie Vielteilchenoperatoren sind, schwerer handhaben als die ursprünglichen. Dieser Weg ist im Prinzip auch bei allen vom Oszillator abweichenden Potentialen beschreibbar^{13), 14)}, führt aber zu erheblichem numerischen Aufwand.

I.2. Spuriöse Schwerpunktsanteile in den Vielteilchenfunktionen des Nilssonmodells bei schweren deformierten Kerne und Vergleich mit leichten deformierten Kernen.

Im Anhang A wird das in dieser Arbeit benutzte Nilssonmodell formuliert. Abweichend von der üblichen Definition wird ein Deformationsparameter ϵ eingeführt, der eine automatische Erfüllung der Volumenkonstanz zuläßt und für kleine Werte unerheblich vom sonst üblichen Deformationsparameter δ abweicht. ϵ wird durch Minimalisierung der Gesamtenergie (Summe der Einteilchenenergien) festgelegt. Die Diagonalisierung des Nilssonoperators erfolgt in harmonischen Oszillatorzuständen in maßstabsverzerrten Zylinderkoordinaten, weil in dieser Basis der anisotrope Oszillator keine Mischung der Oszillatorquantenzahl N bewirkt. Auch $\vec{l}s$ - und $\vec{l}^2$ -Terme werden so gewählt, daß diese Quantenzahl gut bleibt.

Auf dem Einteilchenspektrum aufbauend wurden Einteilchen-Einloch-Zustände und Zweiteilchen-Zweiloch-Zustände zu guter Projektion Ω des Gesamtspins und guter Parität gebildet. Betrachtet wurden die Zustände der geraden-geraden Ytterbiumisotope. Diese Isotope besitzen eine sehr gute konstante Grundzustandsdeformation, sodaß mit einem einheitlichen Satz von Nilssonwellenfunktionen gerechnet werden konnte. Der benutzte Deformationsparameter war $\epsilon \approx 0.27$; die Konstanten κ und μ für die $\vec{l}s$ - und $\vec{l}^2$ -Terme (siehe Anhang A) wurden in der für Seltene Erden üblichen Weise zu $\kappa \approx 0.0637$, $\mu \approx 0.6$ für Protonen und $\kappa \approx 0.0637$, $\mu \approx 0.42$ für Neutronen gewählt. Da bei der Berechnung der Matrixelemente von Zweiteilchenoperatoren in den Summen alle Zustände unterhalb der Fermikante auftreten, müssen die Parameter κ und μ einheitlich für alle Neutronen- und einheitlich für alle Protonenzustände gewählt werden, damit die Basis der Einteilchenzustände orthogonal ist.

Mit den so gewonnenen Vielteilchenzuständen $\psi_\alpha(\vec{r}_i)$ wurden die Erwartungswerte von

$$\tilde{H}_{cn}(\vec{R}, \vec{P}) = H_{cn}(\vec{r}_i, \vec{p}_i) + \frac{(\sum \vec{p}_i)^2}{2 A m} + \frac{m}{2 A} \left\{ \omega_x^2 (\sum x_i)^2 + \omega_y^2 (\sum y_i)^2 + \omega_z^2 (\sum z_i)^2 \right\} \quad (I.14)$$

wie sich H_{CM} aus dem Nilssonmodell ergibt, berechnet. Dabei bestätigen sich die im Teil I.1 gemachten Voraussagen. Nach Gleichung (I.13) sollte man unter den Anregungszuständen mit einer Energie kleiner als $s_1 - s_0 \approx \hbar \omega_0 = 41 \cdot A^{-1/3} \text{ MeV} \approx 6 \text{ MeV}$ (für die Ytterbiumisotope) keine Zustände finden, die zum ersten angeregten Zustand von H_{CM} gehören. Trivialerweise ist das natürlich der Fall. Interessant waren nur die Abweichungen der Erwartungswerte $\langle \psi | H_{CM} | \psi \rangle$ von der Grundzustandsenergie

$$S_0 = \hbar \omega_0 + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 = \hbar \omega_0 \left(e^{\epsilon/3} + \frac{1}{2} e^{-2\epsilon/3} \right) \quad (\text{I.15})$$

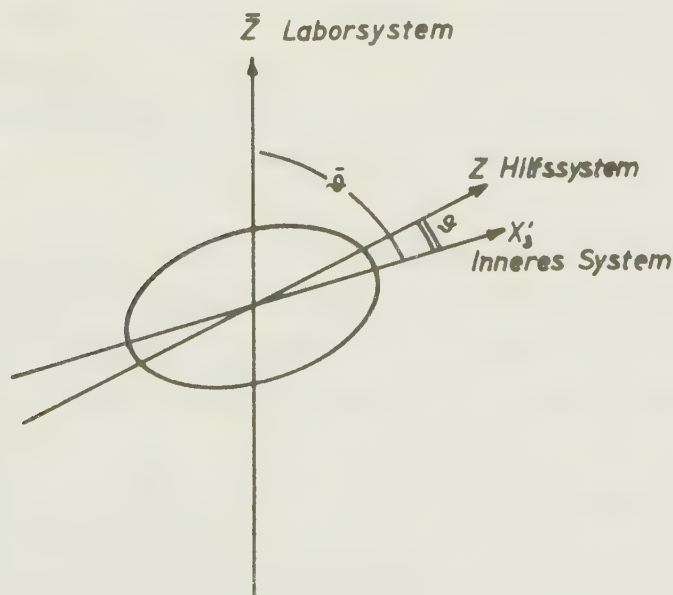
des Schwerpunktsoszillators, die aufgrund der $\hat{l}\hat{s}$ - und $\hat{l}^2$ -Terme zustandekommen. Der Erwartungswert von H_{CM} in den Schalenmodellgrundzuständen der Ytterbiumisotope besitzt gegenüber s_0 eine Anregungsenergie von $0,2 \sim 0,3 \text{ keV}$, Zustände bis zu 2 MeV weichen von s_0 um $1-2 \text{ keV}$, Zustände darüber bis zu 5 MeV um $10-30 \text{ keV}$ ab. Damit bestätigt sich, daß bei schweren deformierten Kernen der Einfluß der $\hat{l}\hat{s}$ - und $\hat{l}^2$ -Terme auf die Schwerpunktsoszillationen vernachlässigbar klein ist, soweit wir nur die Anregungsenergien betrachten. Bei der Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten braucht diese Vernachlässigung nicht unbedingt gerechtfertigt zu sein.

Ergänzend sei erwähnt, daß man bei Rechnungen an leichten deformierten Kernen in einer ungünstigeren Lage ist. Betrachtungen der Vielteilchenzustände an Ne^{20} zeigen ^{14), 22)}, daß im Bereich der Zustände mit Anregungsenergien von etwa $\hbar \omega_0$ und darüberhinaus, die dort im Niederenergiespektrum benötigt werden, solche gefunden werden, die zum ersten angeregten Zustand von H_{CM} gehören (0^- und 1^- - Zustände). Weiterhin tragen die Zustände aufgrund des $\hat{l}\hat{s}$ - und $\hat{l}^2$ -Termes spuriöse Beiträge der Schwerpunktsoszillationen bis zu etwa $0,5 \text{ MeV}$.

II.1. Die Projektion spuriöser Rotationszustände nach der Methode von Scheid

Das Phänomen spurioser Rotationsanteile in den Vielteilchenfunktionen nichtsphärischer Schalenmodelle wurde bereits in der Einleitung beschrieben. Der Hamiltonoperator mit anisotropem Potential, speziell der Nilssonoperator, bezieht sich auf ein Laborsystem, in dem alle 3 A Freiheitsgrade des Kerns berücksichtigt werden, und nicht auf ein inneres System des Kerns, in welchem sechs Freiheitsgrade weniger benötigt werden. Die Massenverteilung von Eigenzuständen in solchen Potentialen führt kollektive Schwingungen aus, die sie aus dem Potential heraus trägt und aufgrund der entstehenden Rückstellkräfte zurücktreibt. Dieses Phänomen wurde als Rotationsoszillation bezeichnet.

Eine Transformation des Schalenmodelloperators auf innere Koordinaten, Schwerpunktskoordinaten und Eulersche Winkel führt nicht wie bei der Schwerpunktsbewegung auf zwei kommutierende Operatoren für die innere und die Rotationsbewegung des Systems. Deshalb muß in diesem Fall ein etwas aufwendigeres Verfahren eingeschlagen werden.



Figur 1

Zur Trennung der inneren Bewegung von der unphysikalischen Rotationsoszillationsbewegung werden in der Theorie von Scheid^{13),14)}, drei Koordinatensysteme eingeführt (siehe Fig.1): erstens ein inneres System, ein Hauptachsensystem bezüglich der Massenverteilung des Kerns und fest mit diesem verbunden, zweitens ein Hilfslaborsystem (kurz Hilfssystem genannt), gegenüber dem der Kern kleine Schwingungen bei den Rotationsoszillationen um Eulersche Winkel $\tilde{\mathbf{j}}$ ausführt, und drittens ein festes Laborsystem. Zwischen dem Laborsystem mit den Koordinaten $\vec{r}$ und dem inneren System liegt eine Transformation mit Eulerschen Winkeln $\tilde{\mathbf{j}}$, welche die physikalischen Rotationen des Kerns beschreiben. Diese Rotationen interessieren uns an dieser Stelle nicht; wir wollen die unphysikalischen, modellabhängigen Rotationsoszillationen in den Griff bekommen. Die Rotationsoszillationen sind kleine Schwingungen des Kerns als Ganzem gegenüber dem Hilfssystem.

Zwischen den Koordinaten des Hilfssystems und des inneren Systems vermittelt eine orthogonale Transformation, wie sie von Villars^{23),24),25)} behandelt worden ist:

$$x_{ic} = \sum_{\alpha} R_{c\alpha}(\tilde{\mathbf{j}})(x_{i\alpha} - X_{\alpha}) \quad c = 1, 2, 3; \quad \alpha = x, y, z; \quad i = 1, \dots, A \quad (\text{II.1})$$

Es beziehen sich fortan die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ auf die Achsen des Hilfssystems, A, B, C, ... auf die Achsen des inneren Systems. $x_{i\alpha}$ sind die Nukleonenkoordinaten, X_{α} die Schwerpunktskoordinaten im Hilfssystem, x'_{iA} sind Koordinaten des inneren Systems.

Die Transformation (II.1) der Koordinaten und die dazu gehörige Transformation der kanonisch konjugierten Impulse vom Hilfssystem auf das innere System (siehe (III.3) und (III.4)) läßt die kinetische Energie des Vielteilchensystems in folgende Terme aufspalten²³⁾:

$$T(\vec{p}) = \frac{\sum \vec{p}_i^2}{2m} = \tilde{T}_{cm}(\vec{p}) + \tilde{T}_{lin}(\xi_v, \tilde{\pi}_v) + \tilde{T}_m(\tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{j}}, \xi_v, \tilde{\pi}_v) \quad (\text{II.2})$$

Hierbei bezeichnen $\vec{P}$ den Gesamtimpuls, ξ_v und $\tilde{\pi}_v$ innere linear unabhängige Koordinaten und kanonisch konjugierte Impulse, auf die wir noch eingehen werden, und $\tilde{\mathbf{j}}$ den Gesamtspin des Nukleonensystems.

Es separiert die kinetische Energie $\tilde{T}_{CM}$ des Schwerpunkts ab.

Der Operator $\tilde{T}_{in}$ wird als kinetische Energie der inneren Bewegung interpretiert, da er nur von den inneren Größen (φ_v, π_v) abhängig ist. Der Operator $\tilde{T}_{rot}$ umfaßt die Rotationsenergie der spuriosen Rotationsoszillationen, aber auch innere kinetische Energie, weil er sowohl von $(\vec{J}, \vec{J})$ als auch von (φ_v, π_v) abhängig ist. $\tilde{T}_{rot}$ ist von der Gestalt:

$$\tilde{T}_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{A,B} Q_{AB}(\varphi_v) (\vec{J}_A - \vec{J}'_A) (\vec{J}_B - \vec{J}'_B) \quad (II.3)$$

Hierin bezeichnet $Q_{AB}(\varphi_v)$ den Trägheitstensor, J'_A die Komponenten eines Operators, der als innerer Drehimpuls interpretiert wird und nur von φ_v und π_v abhängt. Man sieht, daß die Aufspaltung in $\tilde{T}_{in}$ und $\tilde{T}_{rot}$ von einer gewissen Willkür ist, da $\tilde{T}_{rot}$ den rein inneren Term $\frac{1}{2} \sum_{A,B} Q_{AB} \vec{J}'_A \vec{J}'_B$ enthält. Wir wollen in dieser Arbeit bei der konventionellen Form von $\tilde{T}_{rot}$ bleiben, was sich endgültig erst mit den Ergebnissen des Teils IV rechtfertigen lassen wird.

Der Operator $\tilde{T}_{rot}$ vermischt die kollektive Rotationsoszillationsbewegung mit der inneren Bewegung des Nukleonensystems. Rechnen wir also, wie es in den Schalenmodellen geschieht, mit der gesamten kinetischen Energie $T(\vec{p}_i)$ aus (II.2), so enthalten unsere Rechnungen gerade diese Mischungen. Hingegen umfaßt $\tilde{T}_{in}$ den Anteil der kinetischen Energie, welcher frei von Beiträgen der spuriosen Rotationsoszillationen ist. Seine Behandlung in den (φ_v, π_v) stößt beim Vielkörperproblem auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Eine formale Umschreibung von $\tilde{T}_{in}$ auf

$$\tilde{T}_{in} = T - \tilde{T}_{CM} - \tilde{T}_{rot} \quad (II.4)$$

läßt jedoch erkennen, daß $\tilde{T}_{in}$ in Hilfssystemkoordinaten beschrieben werden kann, wenn es gelingt, $\tilde{T}_{CM}$ und $\tilde{T}_{rot}$ auf diese Koordinaten zu transformieren. Im Falle von $\tilde{T}_{CM}$ ist dies trivial, im Falle von $\tilde{T}_{rot}$ bedeutet es, daß wir die Eulerschen Winkel und die J'_A durch Nukleonen-

koordinaten ausdrücken müssen. Die Möglichkeit einer derartigen Umrechnung ist eng mit der Wahl der Nebenbedingungen an die x'_{1A} aus (II.1) verbunden.

Da in die Transformation (II.1) sechs kollektive Koordinaten eingeführt worden sind, drei Schwerpunktskoordinaten X_A und drei Eulersche Winkel $\mathcal{J}_j$, sind die x'_{1A} nicht voneinander unabhängig, sondern hängen ihrerseits von den bereits erwähnten (3A-6) linear unabhängigen, inneren Koordinaten φ_v ab. Identisch in den φ_v müssen daher die x'_{1A} sechs Nebenbedingungen erfüllen. Drei davon sind unmittelbare Folge der Einführung der Schwerpunktskoordinaten:

$$\sum_i x'_{i1}(\varphi_v) = \sum_i x'_{i2}(\varphi_v) = \sum_i x'_{i3}(\varphi_v) = 0 \quad (\text{II.5})$$

Die drei weiteren Nebenbedingungen dienen dazu, das innere System gegenüber dem Hilfssystem und damit die Eulerschen Winkel festzulegen. In der Theorie von Scheid soll die Transformation (II.1) auf das Hauptachsensystem des Trägheitstensors führen, wie es auch im Rotations- Vibrations- Modell ²⁶⁾⁻³⁰⁾ gefordert wird. Es müssen daher die Deviationsmomente verschwinden und die x'_{1A} identisch die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\sum_i x'_{i1}(\varphi_v) x'_{i2}(\varphi_v) = \sum_i x'_{i1}(\varphi_v) x'_{i3}(\varphi_v) = \sum_i x'_{i2}(\varphi_v) x'_{i3}(\varphi_v) = 0 \quad (\text{II.6})$$

Setzt man die Transformation (II.1) in (II.6) ein, so erhält man transzendente Gleichungen in den Eulerschen Winkeln. Da die Rotationsoszillationen wegen der Rückstellpotentiale um kleine Eulersche Winkel erfolgen, kann man diese Gleichungen iterativ nach den Eulerschen Winkeln auflösen. Als erster Schritt, der verbessert werden kann, ergeben sich die einfachen Ausdrücke:

$$\mathcal{J}_x = \frac{I_{y^2}}{I_y - I_z} \quad \mathcal{J}_y = \frac{I_{zx}}{I_z - I_x} \quad \mathcal{J}_z = \frac{I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (\text{II.7})$$

mit

$$I_{\alpha\beta} = \sum_i (x_{i\alpha} - X_\alpha)(x_{i\beta} - X_\beta) \quad I_\alpha = \sum_i (x_{i\alpha} - X_\alpha)^2 \quad (\text{II.8})$$

Die Bedingungen (II.6) führen auf einen diagonalen Trägheitstensor mit den folgenden Trägheitsmomenten

$$\Theta_c = m \frac{(I_A - I_B)^2}{I_A + I_B} \quad A, B, C \text{ zyklisch} \quad (\text{II.9})$$

mit

$$I_A = \sum_i x_{iA}^2 \quad (\text{II.10})$$

Diese Operatoren sind identisch mit den Trägheitsmomenten des hydrodynamischen Modells. Ihre Erwartungswerte, wenn auch abhängig von den Wellenfunktionen, werden viel kleiner als die experimentellen Trägheitsmomente sein. Diese Tatsache könnte einen veranlassen, die Nebenbedingungen (II.6) durch andere zu ersetzen.

Man ist versucht, sich von folgendem Gedankengang leiten zu lassen: Die Form (II.2) der kinetischen Energie dient normalerweise dazu, die physikalischen Rotationen anstatt der Rotationsozillationen zu beschreiben. Also wäre es zweckmäßig, die Nebenbedingungen (II.6) durch solche zu ersetzen, daß mithilfe von $\tilde{T}_{rot}$ relativ ungestörte Rotationsbanden erhalten werden, daß also J' klein wird und die Trägheitsmomente den experimentellen nahe kommen. Solche Versuche lassen sich in der Tat durchführen (siehe Lipkin¹⁵). Dagegen ist zu sagen: Erstens dient hier $\tilde{T}_{rot}$ zur Beschreibung der Rotationsoszillationen, also gebundener und nicht freier Rotationen. Zweitens bewirkt eine Abweichung von den Bedingungen (II.6), daß der Trägheitstensor nicht mehr diagonal ist, und es ist unzulässig, sodann die Kopplungsterme der verschiedenen Bewegungen zu vernachlässigen. Schließlich zeigt sich, daß alle anderen Wege¹⁵⁾ auf eine sehr komplizierte Abhängigkeit der Eulerschen Winkel von den Nukleonenkoordinaten führen. Insbesondere werden die Eulerschen Winkel auch von den Impulsen p_{1a} abhängig. Da aber diese Übersetzung ein wesentlicher Schritt bei der Behandlung der spuriosen Rotationsoszillationen ist, muß die Wahl der Nebenbedingungen (II.6) so vorgenommen werden, daß sich ein einfacher Zusammenhang ergibt.

Es ist klar, wie innerhalb dieser Theorie die physikalischen Rotationen beschrieben werden. Sie behandeln die Bewegung des inneren Systems gegenüber dem Laborsystem mit den Eulerschen Winkeln $\tilde{\mathcal{J}}$ durch einen Hamiltonoperator analog zu (II.3), der, da wir auf Hauptachsen transformiert haben, im axialsymmetrischen Fall die Gestalt annimmt

$$\tilde{T}_{\text{rot}}(\tilde{\mathcal{J}}, \tilde{\mathcal{I}}, \mathcal{E}_v, \pi_v) \approx \frac{(\tilde{\mathcal{I}} - \tilde{\mathcal{J}}')^2}{2 \Theta_0} \quad (\text{II.11})$$

wobei $\tilde{\mathcal{I}}$ der Gesamtdrehimpuls als Funktion der Eulerschen Winkel und ihrer Ableitungen ist. Die in (II.11) enthaltenen Coriolisterme müssen diagonalisiert werden und haben die Auswirkung, als wenn $\tilde{T}_{\text{rot}}$ wie ein Operator

$$\frac{\tilde{\mathcal{I}}^2 - \tilde{\mathcal{I}}_3^2}{2 \Theta_{\text{eff}}} + \frac{\mathcal{J}'^2 - \mathcal{J}'_3^2}{2 \Theta_0} \quad (\text{II.12})$$

mit einem effektiven Trägheitsmoment Θ_{eff} , ^{verschieden} wesentlich vom hydrodynamischen Wert Θ_0 , wirkt. Dieser Punkt wird durch weitere Bemerkungen später noch klarer werden.

Die Transformation (II.1) und die daraus resultierende Form (II.2) der kinetischen Energie soll die Möglichkeit schaffen, die innere Bewegung des Nukleonensystems von der spuriosen Rotationsoszillationsbewegung zu trennen. Die Beziehungen (II.7) für die Eulerschen Winkel erlauben es, $\tilde{T}_{\text{rot}}$ aus (II.3) mit den Trägheitsmomenten (II.9) vollständig auf die Nukleonenkoordinaten und Impulse des Hilfssystems umzuschreiben. Hierzu gehört noch eine Umrechnung von $\mathcal{J}'$ auf diese Größen, welche im Teil III dieser Arbeit gebracht wird. In

$$\tilde{T}_{\text{in}}(\mathcal{E}_v, \pi_v) = T_{\text{in}}(\vec{r}_i, \vec{p}_i) = T(\vec{p}_i) - T_{\text{cm}}(\vec{p}_i) - T_{\text{rot}}(\vec{r}_i, \vec{p}_i) \quad (\text{II.13})$$

welches explizit nur von den inneren Größen $(\mathcal{E}_v, \pi_v)$ abhängig ist, erhalten wir damit für die innere kinetische Energie einen Ausdruck in den Nukleonenkoordinaten des Hilfssystems. Durch Hinzunahme eines Schalenmodellpotentials in den Koordinaten x_i ergänzen wir $\tilde{T}_{\text{in}}$ zu einem Hamiltonoperator der inneren Bewegung. Im Falle des Nilssonmodells setzen wir im inneren System ein anisotropes harmonisches

Oszillatorpotential an unter Verwendung der Größen I_A aus (II.10)

$$\tilde{V}_{in} = \frac{m}{2} (\omega_x^2 I_x + \omega_y^2 I_y + \omega_z^2 I_z) \quad (II.14)$$

$\tilde{V}_{in}$, welches nur von den φ_v abhängt, kann bei kleinen Eulerschen Winkeln auf das Hilfssystem transformiert werden. Diese Methode ist für jedes Schalenmodellpotential möglich, erweist sich aber beim harmonischen Oszillatorpotential als besonders einfach. Bei Entwicklung bis zu quadratischen Termen in den Eulerschen Winkeln ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{in}(\varphi_v) = V_{in}(\vec{r}_0) = \frac{m}{2} (\omega_x^2 I_x + \omega_y^2 I_y + \omega_z^2 I_z) \\ + \frac{m}{2} \{ (\omega_y^2 - \omega_z^2)(I_y - I_z) \mathfrak{Y}_x^2 + (\omega_z^2 - \omega_x^2)(I_z - I_x) \mathfrak{Y}_y^2 + (\omega_x^2 - \omega_y^2)(I_x - I_y) \mathfrak{Y}_z^2 \} \end{aligned} \quad (II.15)$$

unter Verwendung der Ausdrücke (II.8). Die Eulerschen Winkel können wieder über (II.7) auf Nukleonenkoordinaten umgeschrieben werden. Die Gleichung (II.15) muß in folgender Form verstanden werden: Das im Hilfssystem aufgeschriebene harmonische Oszillatorpotential für die Nukleonen- und die Schwerpunktsbewegung (erster Term der rechten Seite) wird durch Rückstellpotentiale (zweiter Term) so korrigiert, daß das Schalenmodellpotential im inneren System nur von den inneren Koordinaten φ_v abhängig ist.

Schließlich erhalten wir in

$$\tilde{H}_{in}(\varphi_v, \vec{p}_v) = H_{in}(\vec{r}_0, \vec{p}_0) - T_{in}(\vec{r}_0, \vec{p}_0) + V_{in}(\vec{r}_0) \quad (II.16)$$

den vollständigen Hamiltonoperator für die innere Bewegung; seine funktionale Abhängigkeit von den Koordinaten und Impulsen der Nukleonen im Hilfssystem ist uns bekannt. Da wir $\tilde{H}_{in}$ in einer Basis im Hilfssystem diagonalisieren wollen, also in Funktionen, die sechs Freiheitsgrade mehr als $\tilde{H}_{in}$ enthalten, müssen wir zusätzlich durch Hamiltonoperatoren die Bewegung der Schwerpunktskoordinaten und der Eulerschen Winkel festlegen, damit diese sechs Freiheitsgrade bei der Diagonalisierung nicht leer mitlaufen. Das Problem der Schwer-

punktsbewegung ist bereits in Teil I behandelt worden und wird wie dort gehandhabt (also durch $H_{CM}(\vec{r}_1, \vec{p}_1)$ aus (I.4)). Die Bewegung der Eulerschen Winkel bestimmen wir auf möglichst einfache Weise durch einen harmonischen Oszillator,

$$\tilde{H}_s = \frac{1}{2} \sum_a \lambda_a \left\{ -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_a^2} + \Omega_a^2 \vartheta_a^2 \right\} \quad (\text{II.17})$$

der sich bei kleinen Eulerschen Winkeln in der Form

$$H_s(\vec{r}_e, \vec{p}_e) = \frac{1}{2} \sum_a \lambda_a \{ J_a^2 + \Omega_a^2 \vartheta_a^2 \} \quad (\text{II.18})$$

auf Nukleonenkoordinaten und Impulse umschreiben läßt.

Der Operator

$$\bar{H}(\vec{r}_e, \vec{p}_e) = H_{in}(\vec{r}_e, \vec{p}_e) + H_{cm}(\vec{r}_e, \vec{p}_e) + H_s(\vec{r}_e, \vec{p}_e) \quad (\text{II.19})$$

bestimmt uns schließlich die Bewegung sämtlicher Freiheitsgrade. Er ist vollständig analog zum Operator (I.4) für die innere und die Schwerpunktsbewegung. Die dort gemachten Feststellungen können hier übernommen werden. Da die drei Operatoren $\tilde{H}_{in}$, $\tilde{H}_{CM}$ und $\tilde{H}_s$ kommutieren, sind die Eigenfunktionen von $\bar{H}(\varphi_v, \pi_v, \vec{R}, \vec{P}, \vartheta_j, \vec{J}) = \bar{H}(\vec{r}_1, \vec{p}_1)$ Produkte der Eigenfunktionen von $\tilde{H}_{in}$, $\chi_j(\varphi_v)$, von $\tilde{H}_s$, $d_\alpha(\vartheta_j)$, und von $\tilde{H}_{CM}$, $\varphi_r(\vec{R})$, wobei über auftretende Entartungen summiert wird. Dieser Satz von Eigenfunktionen ist größer als der von $\tilde{H}_{in}$. Nach einer weiteren Diagonalisierung von H_{CM} und H_s in den Eigenfunktionen von $\bar{H}$ läßt sich eine Klasse von Funktionen $\psi_{j\alpha}(\vec{r}_e)$ aussuchen, welche alle Eigenfunktionen von $H_{in}(\vec{r}_1, \vec{p}_1)$ sind und zum Grundzustand von H_{CM} und H gehören:

$$\psi_{j\alpha}(\vec{r}_e) = \Phi_{j\alpha}(\varphi_v, \vec{R}, \vartheta_j) = \chi_j(\varphi_v) \cdot \varphi_r(\vec{R}) \cdot d_\alpha(\vartheta_j) \quad (\text{II.20})$$

Die Klasse der $\psi_{j\alpha}(\vec{r}_e)$ ist vollständig äquivalent den $\chi_j(\varphi_v)$ in dem Sinne, daß der spurlose Beitrag der Schwerpunkts- und Rotationsoszillationen in allen Funktionen gleich und bekannt ist und damit berücksichtigt werden kann.

II.2. Betrachtung des axialsymmetrischen Falls in der Methode von Scheid

Die in II.1. geschilderte Methode der Projektion spurioser Rotationsoszillationen gilt nur unter der Annahme nichtaxialsymmetrischer Schalenmodellpotentiale. Sie führt an mehreren Stellen auf mathematische Schwierigkeiten, wenn sie auf axialsymmetrische Potentiale, wie das Nilssonpotential, angewendet wird.

1. Durch die Transformation auf das Hauptachsensystem des Trägheitstensors (II.6) nimmt $\tilde{T}_{rot}$ aus (II.3) die folgende Gestalt an:

$$\tilde{T}_{rot} = \frac{1}{2} \sum_A \frac{1}{\Theta_A} (J_A - J'_A)^2 \quad (II.21)$$

Für axialsymmetrische Zustände stimmen die Erwartungswerte der Komponenten J_3 und J'_3 auf die Symmetrieachse überein, $\langle J_3 \rangle = \langle J'_3 \rangle$ und deshalb wird üblicherweise ein Verschwinden der zugehörigen kinetischen Terme angenommen. Da zwischen J_3 und J'_3 jedoch nicht die Operatoridentität $J_3 = J'_3$ besteht, liefert $(J_3 - J'_3)^2$ von Null verschiedene, wenn auch kleine Erwartungswerte. Die gleiche Argumentation gilt für das Trägheitsmoment $\Theta_3 = m \cdot \frac{(I_1 - I_2)^2}{I_1 + I_2}$. Zwar gilt für axialsymmetrische Zustände $\langle I_1 \rangle = \langle I_2 \rangle$, aber wiederum existiert keine Operatoridentität, sodaß $(I_1 - I_2)^2$ von Null verschiedene, wenn auch kleine Werte liefert. Deshalb liegen die Erwartungswerte des kinetischen Terms $\frac{1}{2\Theta_3} (J_3 - J'_3)^2$ von (II.21) in der gleichen Größenordnung wie die beiden anderen.

Mathematisch zwingender ergibt sich dieser Schluß aus einer Umformung von (II.21), die in Teil III der Arbeit abgeleitet wird:

$$\tilde{T}_{rot} = \sum_c \frac{1}{2\Theta_c} (J_c - J'_c)^2 = \frac{1}{2m} \sum_{A < B} \frac{1}{I_A + I_B} N_{AB}^2 \quad (II.22)$$

wobei N_{AB} die Komponente des Natafoperators³¹⁾ bezogen auf das innere System ist, $N_{AB} = \sum_i (x'_{iA} p_{iB} + x'_{iB} p_{iA})$. In (II.22) treten keine Operatordifferenzen mehr auf. Alle drei Terme erscheinen hier gleichberechtigt. Weil wir die kollektive Koordinate $\mathfrak{J}_z$ für die Roationsbewegungen um die Symmetrieachse eingeführt haben, er-

scheint in (II.22) eine entsprechende kinetische Energie.

2. Ein wesentlicher Schritt bei der Projektion der spuriösen Rotationsoszillationen ist die Übersetzung (II.7) der Eulerschen Winkel auf die Koordinaten des Hilfssystems. Für axialsymmetrische Zustände verschwinden Zähler und Nenner beim Winkel $\mathfrak{J}_z = \frac{I_{x_1}}{I_{x_1} - I_{x_2}}$ und dieser Winkel wird unbestimmt. Die Beziehung (II.7) beruht auf der Annahme, daß die Schwingungen des inneren Systems gegenüber dem Hilfssystem nur um kleine Eulersche Winkel stattfinden, d.h. daß diese Bewegungen durch das Auftreten der Rückstellpotentiale genügend eingeschränkt werden. In der Tat sind die Schwingungen gegenüber der Symmetrieachse klein, sie betragen bei Ne^{20} (siehe Ref. 14) und 22)) etwa 11° , im Bereich der Seltenen Erden nur 5° . Hingegen kann von Oszillationen der Massenverteilung um die Symmetrieachse des Potentials keine Rede sein, da (im Falle des Nilssonpotentials ist $\omega_x = \omega_y$) das entsprechende Rückstellpotential verschwindet. Der Winkel $\mathfrak{J}_z$ ist vielmehr vollständig unbestimmt, was sich in der Übersetzung von $\mathfrak{J}_z$ auf Nukleonenkoordinaten widerspiegelt.

3. An dieser Stelle könnte man versucht sein, in $\tilde{H}_\lambda$ ein entsprechend starkes Rückstellpotential für den Eulerschen Winkel $\mathfrak{J}_z$ einzuführen, um kleine Schwingungen zu erzwingen. Davon unbeeinflusst bleibt aber das eigentliche Nilssonmodell und seine Eigenfunktionen, die ein derartiges Rückstellpotential nicht enthalten. Daher ist dieser Weg dem axialsymmetrischen Fall nicht angemessen. Es sei nochmals hervorgehoben: Beim axialsymmetrischen Potential treten um die Symmetrieachse keine Rotationsoszillationen auf, daher erübrigt sich die Einführung der kollektiven Koordinate .

Wir entwickeln deshalb in Teil III die Theorie der Projektion spuriöser Rotationsoszillationen für axialsymmetrische Potentiale unter Einführung von nur zwei Eulerschen Winkeln. Dabei wird sich zeigen, daß die genannten mathematischen Schwierigkeiten nicht mehr auftreten.

III. Die Projektion spurioser Rotationsoszillationen bei Verwendung axialsymmetrischer Potentiale

In Anlehnung an die Methode von Scheid ¹³⁾ und Scheid und Greiner ¹⁴⁾ entwickeln wir einige Grundzüge der Projektion spurioser Rotationsoszillationen bei Verwendung axialsymmetrischer Potentiale. Es hatte sich gezeigt, daß um die Symmetrieachse des Potentials keine Rotationsoszillationen auftreten. Es erwies sich als notwendig, in die Transformation (II.1) nur noch zwei Eulersche Winkel eingehen zu lassen.

Bei der Wahl der Rotationsachsen entfällt die Drehung um die Symmetrieachse des Potentials im inneren System, welche wir mit der inneren 3-Achse zusammenfallen lassen wollen. Da die Rotationsoszillationen nur um kleine Eulersche Winkel stattfinden, weichen innere 3-Achse und die z-Achse des Hilfssystems nur gering voneinander ab. Deshalb entfällt ebenfalls eine Drehung um die z-Achse des Hilfssystems.

Es verbleiben zwei Möglichkeiten zur Wahl der Rotationsachsen. Man führt zunächst eine Drehung um den Winkel $\mathfrak{J}_x$ um die x-Achse des Hilfssystems durch, dann um den Winkel $\mathfrak{J}_y$ um die neue y-Achse, oder man benutzt die umgekehrte Folge der Drehungen. In dieser Arbeit wurde die erste Möglichkeit benutzt. Im Anhang C ist die Transformation (II.1) für zwei Eulersche Winkel angegeben. Aus ihr kann man die funktionale Abhängigkeit der $R_{A\alpha}$ von den Eulerschen Winkeln entnehmen.

Da in die Transformation (II.1) nur noch fünf kollektive Variable eingehen, müssen die X'_{1A} nur fünf Nebenbedingungen identisch in den $(3N-5)$ inneren Koordinaten φ_v erfüllen. Die drei Bedingungen (II.5) bleiben als Folge der Einführung der Schwerpunktskoordinaten erhalten. Bei den Deviationsmomenten gilt nicht mehr die identische Beziehung $\sum_i x'_{i,1}(\varphi_v) x'_{i,2}(\varphi_v) \equiv 0$, sondern nur noch

$$\sum_i \dot{x}_{i1}(\varphi_v) \dot{x}_{i3}(\varphi_v) = \sum_i \dot{x}_{i2}(\varphi_v) \dot{x}_{i3}(\varphi_v) \equiv 0 \quad (\text{III.1})$$

Da die axialsymmetrischen Potentiale den Bewegungen um die Symmetrieachse keine Rückstellkräfte entgegensetzen, kann man nicht mehr fordern, daß das Massendeviationsmoment bezüglich dieser Achse identisch verschwindet. Diese Tatsache wird dadurch berücksichtigt, daß der Eulersche Winkel $\mathfrak{J}_z$, welcher kollektive Drehungen um die Symmetrieachse beschreibt, nicht mehr als dynamische Variable eingeführt wird. Er wird in einer festen, aber willkürlichen Weise gewählt, hier als $\mathfrak{J}_z = 0$. Der Trägheitstensor kann in dieser Theorie natürlich nicht mehr vollständig diagonal gemacht werden.

Der zur Laborkoordinate $x_{1\alpha}$ gehörende kanonisch konjugierte Impuls $p_{1\alpha}$ ergibt sich wie bei Villars²³⁾ zu

$$p_{1\alpha} = \frac{1}{A} P_\alpha + \sum_j \frac{\partial \mathfrak{J}_j}{\partial x_{1\alpha}} \tilde{\pi}_j + \sum_z \frac{\partial \varphi_z}{\partial x_{1\alpha}} \tilde{\pi}_z \quad (\text{III.2})$$

wobei $\tilde{\pi}_j$ der kanonisch konjugierte Impuls von $\mathfrak{J}_j$ und $\tilde{\pi}_z$ von φ_z ist, und weiter zu:

$$p_{1\alpha} = \frac{1}{A} P_\alpha + \sum_c R_{c\alpha} p'_{1c} + \sum_c M_{1\alpha,c} (L_c - L'_c) \quad (\text{III.3})$$

Dabei ist P_α der Gesamtimpuls des Kerns, p'_{1c} eine als innerer Impuls bezeichnete Größe, die nur von $(\varphi_v, \tilde{\pi}_v)$ abhängig ist und gegeben ist durch¹⁴⁾

$$p'_{1\alpha} = \sum_{\sigma\tau} \frac{\partial x_{1\alpha}}{\partial \varphi_\tau} D_{\sigma\tau} \tilde{\pi}_\tau \quad ; \quad D_{\sigma\tau} = \sum_{iA} \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_{iA}} \frac{\partial \varphi_\tau}{\partial x_{iA}} \quad (\text{III.4})$$

L_c sind die auf das innere System transformierten Komponenten des Gesamtdrehimpulses

$$L_c = \sum_i (\dot{x}_{i1} p_{i3} - \dot{x}_{i3} p_{i1}) \quad \text{und zyklisch} \quad (\text{III.5})$$

mit

$$p_{iA} = \sum_{\alpha} R_{A\alpha} p_{i\alpha} \quad (\text{III.6})$$

Schließlich ist

$$L'_c = \sum_i (x'_{iA} p'_{iB} - x'_{iB} p'_{iA}) \quad \text{und zyklisch} \quad (\text{III.7})$$

eine als innerer Drehimpuls interpretierte Größe. Die $M_{i\alpha,c}$ berechnen sich folgendermaßen

$$M_{i\alpha,c} = \sum_{\gamma} \frac{\partial R_{A\gamma}}{\partial x_{i\alpha}} R_{B\gamma} \quad \text{und zyklisch} \quad (\text{III.8})$$

Als Folge der Einführung von nur zwei Eulerschen Winkeln läßt sich $M_{i\alpha,3}$ auf $M_{i\alpha,1}$ zurückführen, wie im Anhang C gezeigt wird, was sich auf alle folgenden Formeln auswirken wird:

$$M_{i\alpha,3} = \tan \vartheta_3 M_{i\alpha,1} \quad (\text{III.9})$$

Für die weiteren Rechnungen sind die Größen $M_{i\alpha,c}$ von Bedeutung. Sie lassen sich aus folgender, leicht herleitbaren Gleichung gewinnen

$$\frac{\partial}{\partial x_{i\alpha}} (I_{AB}) = P_{i\alpha,AB} + \sum_c (M_{i\alpha,Ac} I_{Bc} + M_{i\alpha,Bc} I_{Ac}) \quad (\text{III.10})$$

mit

$$I_{AB} = \sum_i x'_{iA} x'_{iB} \quad (\text{III.11})$$

und

$$P_{i\alpha,AB} \equiv P_{i\alpha,c} = R_{Bc} x'_{iA} + R_{Ac} x'_{iB} \quad (\text{III.12})$$

Unter Verwendung von (III.2), dem Verschwinden der Deviationsmomente I_{13} und I_{23} , lassen sich $M_{1\alpha,1}$ und $M_{1\alpha,2}$ aus (III.10) entnehmen:

$$M_{1\alpha,1} = G^{-1} \{ (I_3 - I_1) P_{1\alpha,1} + I_{12} P_{1\alpha,2} \} \quad (\text{III.13})$$

$$M_{1\alpha,2} = G^{-1} \{ (I_2 - I_1) P_{1\alpha,2} - I_{12} P_{1\alpha,1} \}$$

wobei I_A abkürzend für I_{AA} aus (III.11) gesetzt wurde und weiter die Abkürzung

$$G = (I_3 - I_1)(I_2 - I_1) + I_{12}^2 \quad (\text{III.14})$$

gewählt wurde.

Im Anhang C werden die vielverwendeten Beziehungen

$$\sum_{i,\alpha} P_{i\alpha,c} M_{i\alpha,b} \quad \text{und} \quad \sum_{i,\alpha} O_{i\alpha,c} M_{i\alpha,b}$$

angegeben, mit

$$O_{i\alpha,AB} \equiv O_{i\alpha,c} = R_{3\alpha} x'_{iA} - R_{A\alpha} x'_{iB} \quad (\text{III.15})$$

Wir führen eine Betrachtung des Drehimpulsoperators bezogen auf das innere System durch, weil diese Größen neu interpretiert werden müssen. Die Komponenten L_c aus (III.5) lassen sich mit (III.15) in der Form

$$L_c = \sum_{i,\alpha} O_{i\alpha,c} p_{i\alpha} \quad (\text{III.16})$$

darstellen. $p_{1\alpha}$ läßt sich aufgrund der Gleichungen (III.2) und (III.3) folgendermaßen schreiben

$$p_{1\alpha} = \sum_c R_{c\alpha} p'_{1c} - \sum_c M_{1\alpha,c} L'_c + \sum_j \frac{\partial \mathcal{H}_j}{\partial x_{1\alpha}} \tilde{\tau}_j + \frac{1}{A} P_\alpha \quad (\text{III.17})$$

werden, wobei auch hier, wie bereits in Teil II.1. besprochen, eine gewissen Willkür herrscht; $\tilde{T}_{\omega 1}$ vermischt die Rotationsoszillationsbewegung mit der inneren Bewegung.

Nach den Ausführungen des Teil II.1. ist es das Ziel, $\tilde{T}_{in}$ in den Koordinaten des Hilfssystems zu behandeln, und zwar in der Form der Gleichung (II.13). Deshalb müssen in $\tilde{T}_{\omega 1}$ zunächst alle Terme, welche die inneren Impulse p'_{ic} enthalten, ersetzt werden. Das geschieht über die Beziehungen (III.26) für $(L_c - L'_c)$. Beachtet man bei dieser Rechnung die Wirkung der Operatoren $(L_c - L'_c)$ auf andere Operatoren, wie sie in (C.12) und (C.14) angegeben sind, so kann man schließlich $\tilde{T}_{\omega 1}$ auf eine Form bringen, in der nur noch die Operatoren N_1 und N_2 auftreten. Diese Rechnung ist im Anhang D skizziert. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\omega 1} = & - \hbar \gamma_i \tan \tilde{J}_3 \frac{G^{-1}}{2_m} \{ I_{12} N_1 - (I_3 - I_1) N_2 \} \\ & + \frac{1}{2_m} G_0^{-1} G_1 \{ (I_1 + I_3) N_1^2 + (I_2 + I_3) N_2^2 - I_{12} (N_1 N_2 + N_2 N_1) \} \end{aligned} \quad (III.34)$$

mit

$$G_0^{-1} G_1 = \{ (I_1 + I_3)(I_2 + I_3) - I_{12}^2 \}^{-1} \quad (III.35)$$

Geht man in $\tilde{T}_{\omega 1}$ zum Grenzwert $I_{12} \rightarrow 0$ über, so ergeben sich formal die gleichen Terme wie bei Scheid¹³⁾. Allerdings fehlen alle Terme, die früher wegen $L_3 \neq L'_3$ nicht verschwanden.

Bezüglich der Hinzunahme der Spinkomponenten zu den Drehimpulsoperatoren L_A und L'_A in (III.33) verweisen wir auf die ausführlichen Diskussionen in den Ref. 14), 23), und übergehen sie hier ganz, weil sie identisch übernommen werden können.

Schließlich kann man $\tilde{T}_{\omega 1}$ aus (III.34) aufs Hilfssystem transformieren, indem die Größen I_A und I_{12} umgerechnet werden und der Natafoperator wie ein Tensor zweiter Stufe transformiert wird:

$$N_c = N_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha, \beta} R_{A\alpha} R_{B\beta} N_{\alpha\beta} \quad \text{und zyklisch} \quad (III.36)$$

Berücksichtigt man die Wirkung der Komponenten N_1 und N_2 auf die $R_{A\alpha}(\mathcal{J}_j)$, so ergibt sich bei dieser Transformation, daß der mit $\tan \mathcal{J}_j$ multiplizierte erste Term von $\tilde{T}_{in}$ aus (III.34) gerade weggehoben wird. Die aufs Hilfssystem transformierte Form von $\tilde{T}_{in}$ enthält noch die Eulerschen Winkel. Wir nutzen wieder aus, daß die Rotationsoszillationen nur um kleine Eulersche Winkel stattfinden, und lösen die Gleichungen (III.1), $I_{13} = I_{12} = 0$, iterativ nach den Eulerschen Winkeln auf. Da I_{12} eine kleine Größe ist, ergibt sich wieder als erster Schritt, wie in II.1. Gleichung (II.7):

$$\mathcal{J}_x = \frac{I_{3z}}{I_y - I_z} \quad \mathcal{J}_y = \frac{I_{zx}}{I_z - I_x} \quad (\text{III.37})$$

Bei dieser Übersetzung weichen die Vertauschungsrelationen der Drehimpulskomponenten mit den Eulerschen Winkeln erst in quadratischen Gliedern in den Winkeln von den gewohnten ab, z.B. erhält man:

$$[L_x, \mathcal{J}_x] = \hbar \left(1 + \mathcal{J}_x^2 + \text{Terme höherer Ordnung} \right) \quad (\text{IV.38})$$

Damit findet man in

$$\tilde{T}_{in}(\mathcal{Q}_v, \tilde{\pi}_v) = T_{in}(\vec{r}_0, \vec{p}_0) = T(\vec{p}_0) - T_{en}(\vec{p}_0) - T_{rot}(\vec{r}_0, \vec{p}_0) \quad (\text{III.39})$$

den Operator der inneren kinetischen Energie. Er hängt nur von den (3N-5) inneren Koordinaten $\mathcal{Q}_v$ und Impulsen $\tilde{\pi}_v$ ab; seine explizite Gestalt in Abhängigkeit von den Hilfssystemkoordinaten $X_{i\alpha}$ und Impulsen $p_{i\alpha}$ wird durch (III.39) beschrieben. Wie in Teil II.1. ergänzen wir $\tilde{T}_{in}$ durch Hinzunahme eines Schalenmodellpotentials $\tilde{V}_{in}$ in den Koordinaten X'_{iA} zu einem inneren Hamiltonoperator. Im Falle des Nilssonmodells setzen wir ein axialsymmetrisches harmonisches Oszillatorpotential in den X'_{iA} an

$$\tilde{V}_{in}(\mathcal{Q}_v) = \frac{m}{2} \left\{ \omega_x^2 (I_1 + I_2) + \omega_z^2 I_3 \right\} \quad (\text{III.40})$$

und transformieren dies aufs Hilfssystem.

Der innere Hamiltonoperator

$$\tilde{H}_{in}(\varphi_v, \bar{\varphi}_v) = \tilde{T}_{in}(\varphi_v, \bar{\varphi}_v) + \tilde{V}_{in}(\varphi_v) \quad (\text{III.41})$$

besitzt die wichtige Eigenschaft, mit L'_3 zu kommutieren

$$[\tilde{H}_{in}, L'_3] = 0 \quad (\text{III.42})$$

Diese Eigenschaft ist nicht selbstverständlich, da der innere Drehimpuls $\vec{L}'$, wie wir gesehen haben, nicht als gewöhnlicher Drehimpuls interpretierbar ist. Deshalb wird die Beziehung (III.42) im Anhang D abgeleitet.

Die Eigenfunktionen von $\tilde{H}_{in}$ können also so gewählt werden, daß sie gleichzeitig Eigenfunktionen von L'_3 sind; wir wollen diese Funktionen als $\chi_{nk}(\varphi_v)$ bezeichnen. Im Teil IV werden wir den Beweis dafür erbringen, daß das weitere von Scheid vorgeschlagene Projektionsverfahren, wie wir es im Teil II.1. geschildert haben, im Falle axialsymmetrischer Potentiale versagt. Gleichzeitig bringen wir mit dieser Einsicht eine Möglichkeit, im Hilfssystem Eigenfunktionen von $H_{in}(\vec{r}_1, \vec{p}_1) = \tilde{H}_{in}(\varphi_v, \bar{\varphi}_v)$ zu konstruieren, die in die Eigenfunktionen $\chi_{nk}(\varphi_v)$ und einen kollektiven Anteil separieren:

$$\psi_{nk}^{(\alpha)}(\vec{r}_1) = \Phi^{(\alpha)}(\vec{r}_1) \cdot \chi_{nk}(\varphi_v) \quad (\text{III.43})$$

Die Funktionen $\Phi^{(\alpha)}(\vec{r}_1)$ spielen bei weiteren Rechnungen die Rolle eines Faktors, der berücksichtigt werden kann. Die Eulerschen Winkel $\vec{r}_1$ sind nach der Projektion als überflüssige Koordinaten aufzufassen, deren Einfluß wir kennen. Weiterhin werden wir zeigen, daß das Basissystem (III.43) nicht redundant gemacht werden kann.

Wie im Teil II.1. geschildert worden ist, führt man für die weitere Rechnung eine Transformation vom Laborsystem auf das innere

System über Eulersche Winkel $\bar{\mathcal{J}}_j$ durch, welche die physikalischen kollektiven Rotationen des Kerns beschreiben sollen. Auch hier muß man sich wieder auf zwei Eulersche Winkel beschränken. Man kann allerdings bezüglich der Winkel $\bar{\mathcal{J}}_j$ auf die übliche Wahl zurückgreifen, d.h. man dreht zunächst um die z-Achse des Laborsystems um $\bar{\mathcal{J}}_z$, dann um die neue y-Achse um $\bar{\mathcal{J}}_y$ und läßt die Drehung um die innere 3-Achse, welche mit der Symmetrieachse des Potentials zusammenfällt, wegfallen. Die kinetische Energie des Nukleonensystems wird wieder vom Laborsystem aufs innere System transformiert. Dabei entsteht wieder $\tilde{T}_{in}$ aus (III.32) und ein Rotationsoperator $\bar{T}_{rot}$ für die kollektiven freien Rotationen

$$\bar{T}_{rot} = \frac{1}{2} \sum_{A,B} Q_{AB} (\bar{I}_A - J'_A)(\bar{I}_B - J'_B) \quad , \quad (III.44)$$

wobei in den J'_A nun die Spinkomponenten mitberücksichtigt werden, $\bar{I}_A$ die Komponenten des Gesamtdrehimpulses bezeichnet und die Q_{AB} die Trägheitsmomente (III.30) darstellen. Weiterhin gilt $I_3 = J'_3$. Wir machen die vereinfachenden Annahmen, daß $Q_{11} = Q_{22} = \frac{1}{\Theta_0}$ und

$Q_{12} \approx 0$ ist, welche für Zustände des axialsymmetrischen Potentials sehr gut erfüllt sind. Dann läßt sich $\bar{T}_{rot}$ in der Form

$$\bar{T}_{rot} = \frac{\bar{I}^2 - I_3^2}{2 \Theta_0} - \frac{\bar{I}_+ J'_- + \bar{I}_- J'_+}{2 \Theta_0} + \frac{J'^2 - J_3'^2}{2 \Theta_0} \quad (III.45)$$

schreiben, wobei Θ_0 das hydrodynamische Trägheitsmoment ist. Nachdem der Operator J' aufs Hilfssystem transformiert worden ist, läßt sich (III.45) in der Basis

$$\psi_{MK, n, \lambda}^I = D_{MK}^{I*} \psi_{nk}^{(\lambda)}(\vec{r}) \quad (III.46)$$

diagonalisieren. Die aufs Hilfssystem transformierten Operatoren $J'_\pm$ wirken nur auf die Funktionen $\psi_{nk}^{(\lambda)}(\vec{r})$ und zwar als Erhöhungs- und Erniedrigungsoperatoren, hingegen wirken die $\bar{I}_\pm$ auf die D_{MK}^{I*} wie Erniedrigungs- und Erhöhungsoperatoren. Der Operator $\bar{I}_+ \cdot J'_-$

mischt also zum Beispiel die Funktionen $D_{MK}^{I*} \psi_{nk}^{(\omega)}(\vec{r})$ mit $D_{M,K-1}^{I*} \psi_{n,k-1}^{(\omega)}(\vec{r})$. Da sich $D_{M,K+1}^{I*}$ in der Form $A \cdot \bar{I}_- \cdot D_{MK}^{I*}$ und $\psi_{n,k+1}^{(\omega)}$ in der Form $B \cdot \vec{J}_+ \cdot \psi_{nk}^{(\omega)}$ mit bestimmaren Faktoren A und B schreiben läßt, ergibt sich z.B. das folgende Matrixelement:

$$\langle D_{MK}^{I*} \psi_{nk} | \bar{I}_+ \vec{J}_- | D_{M,K+1}^{I*} \psi_{n,k+1} \rangle = A \cdot B \langle D_{MK}^{I*} \psi_{nk} | \bar{I}_+ \bar{I}_- \cdot \vec{J}_- \vec{J}_+ | D_{MK}^{I*} \psi_{nk} \rangle \quad (\text{III.47})$$

Macht man die gleiche Betrachtung für die Matrixelement des Operators $\bar{I}_- \vec{J}_+$ und verwendet symmetrisierte Wellenfunktionen (III.46), so erkennt man, daß der Coriolisterm in (III.45) die Eigenschaft hat, wieder zu einer $I(I+1)$ - Abhängigkeit zu führen und damit das hydrodynamische Trägheitsmoment Θ_0 zu renormieren. Über die Größe der so resultierenden effektiven Trägheitsmomente kann erst nach Diagonalisierung eine Aussage gemacht werden, da sie von den Matrixelementen des inneren Operators $\vec{J}'$ bestimmt werden.

IV. 1. Probleme der numerischen Behandlung des Projektionsverfahrens für spuriose Rotationszustände

Zur Projektion spurioser Rotationszustände, deren Theorie in Teil II und III dieser Arbeit abgeleitet worden ist, wurden vor dieser Arbeit noch keine Rechnung durchgeführt. Man befindet sich daher bezüglich verschiedener Fragen noch gänzlich im Ungewissen. Unter anderem stellen sich dabei die folgenden Fragen:

1. Wie sind die Matrixelemente der in der Theorie auftretenden Operatoren zu berechnen?

Soweit es sich um Einteilchen- und Zweiteilchenoperatoren handelte, wurden ihre Matrixelemente in den Einteilchen-Einloch-Zuständen und Zweiteilchen-Zweiloch-Zuständen der benutzten Basis ohne Näherungen berechnet. Die Dreiteilchenoperatoren, wie etwa $(I_z - I_x) I_{xz}^2$ aus (II.15), kommen in der Theorie nur in faktorisierter Form vor. Hier kann man zur Berechnung des Matrixelementes zwischen den Einteilchen- und den Zweiteilchenoperator einen vollständigen Satz von Vielteilchenwellenfunktionen einschieben, wenn die Operatoren starke Auswahlregeln haben und ihre nichtdiagonalen Matrixelemente klein gegen ihre Erwartungswerte sind, die vollständige Summe also beschnitten werden kann. Diese Methode ist durch eine direkte Berechnung der Matrixelemente der Dreiteilchenoperatoren nachprüfbar.

Grundsätzlich schwieriger ist die Berechnung der Matrixelemente von inversen Operatoren. Ausdrücke mit inversen Operatoren finden sich vielfach in der Theorie, z.B. in den Eulerschen Winkeln $(\frac{I_{xz}}{I_z - I_x})$, ihren Quadraten, den Trägheitsmomenten

$(\frac{(I_z - I_x)^2}{I_z + I_x})$ und Termen der Form $\frac{(I_A - I_A')^2}{2 \Theta}$. In jedem

Fall handelt es sich um die inversen Operatoren von $I_z - I_x$, $I_z + I_x$ oder deren Quadraten. Bezeichnet O einen dieser Operatoren, O^{-1} seinen inversen, so gibt

$$\sum_k \langle n|O|k\rangle \langle k|\bar{O}^{-1}|m\rangle = \delta_{nm} \quad (\text{IV.1})$$

oder ausführlicher

$$\sum_{k \neq n,m} \langle n|O|k\rangle \langle k|\bar{O}^{-1}|m\rangle + \langle n|O|m\rangle \langle m|\bar{O}^{-1}|m\rangle + \langle n|O|n\rangle \langle n|\bar{O}^{-1}|m\rangle = \delta_{nm} \quad (\text{IV.2})$$

Hierbei bezeichnen $|n\rangle, |k\rangle, |m\rangle$ Vielteilchenzustände und die Summe läuft über einen vollständigen Satz von Vielteilchenzuständen. Unter der Voraussetzung, daß die Erwartungswerte $\langle n|O|n\rangle$ wenig voneinander abweichen und die nichtdiagonalen Matrixelemente $\langle n|O|k\rangle$ klein gegen die Erwartungswerte sind, gilt das Gleiche für die Matrixelemente des inversen Operators. Dann kann (IV.2) iterativ nach den Matrixelementen des inversen Operators aufgelöst werden und man erhält als ersten Schritt:

$$\langle n|\bar{O}^{-1}|n\rangle = \frac{1}{\langle n|O|n\rangle} \quad ; \quad \langle n|\bar{O}^{-1}|m\rangle = - \frac{\langle n|O|m\rangle}{\langle n|O|n\rangle \langle m|O|m\rangle} \quad (\text{IV.3})$$

Bei schweren deformierten Kernen erfüllen die Operatoren $I_z - I_x$, $I_z + I_x$ und deren Quadrate die an den Operator O gestellten Forderungen, wenn der Kern als guter Rotator gelten kann. In diesem Fall fällt das innere System mit dem Hauptträgheitssystem überein, und die Anregung einiger weniger Nukleonen stört die Massenverteilung des Kerns nicht stark, sodaß die Trägheitsmomente nur wenig abgeändert werden. Da die Operatoren $I_z - I_x$, $I_z + I_x$ und deren Quadrate Bestandteile der Trägheitsmomente sind, gilt für sie das Gleiche. Die Anregung weniger Nukleonen sollte ihre Erwartungswerte nicht stark verändern, die nichtdiagonalen Matrixelemente sollten klein sein.

In der Tat zeigt sich bei den Yterbium-Isotopen, die als gute Rotatoren gelten, daß die Erwartungswerte von $I_z - I_x$, $I_z + I_x$ maximal um 3% und die Erwartungswerte ihrer Quadrate maximal um 9% bei Anregungszuständen bis etwa 3 MeV schwanken und daß

die nichtdiagonalen Matrixelemente maximal 10% der diagonalen betragen. Die Behandlung (IV.3) ist daher gerechtfertigt. Im Gegensatz dazu zeigen sich etwa bei Ne^{20} Schwankungen bis zu 30% und auch die nichtdiagonalen Matrixelemente können 30% der Erwartungswerte betragen²²⁾. Bei leichten deformierten Kernen ist daher die Massenverteilung weniger stabil gegen die Anregung einiger Nukleonen, was bei den kleinen Massenzahlen zu erwarten ist. (Bei Ne^{20} tritt als weiterer Effekt auf, daß dieser Kern aufgrund seiner kollektiven Energiefläche nicht als guter Rotator angesehen werden kann. Siehe auch weiter unten).

2. Als weitere Frage stellt sich: Nach welchen Kriterien soll der Deformationsparameter gewählt werden?

Der Deformationsparameter des Einteilchenmodells wird üblicherweise durch Minimalisierung der Gesamtenergie des Korns (Summe der Einteilchenenergien) bestimmt. Die aus dem Minimum der kollektiven Energiefläche ermittelte Grundzustandsdeformation braucht nicht notwendigerweise genau mit dem Erwartungswert der Vibrationskoordinate a_0 im Grundzustand übereinzustimmen. Sie weicht davon ab, wenn die Energiefläche in der Nähe des Minimums β_0 stark von der Parabelform abweicht. (Wir können den Kern dann nicht als guten Rotator interpretieren.)

Gleichzeitig läßt sich in dem Verhältnis $\frac{I_z - I_x}{I_z + I_x}$ ein Maß für

die Deformation des Korns finden. Nimmt man an, daß die Oberfläche des Korns mit einer Äquipotentialfläche übereinstimmt, und fordert man für diese Volumenkonstanz, so ergibt eine Integration über die Koordinatenquadrate über das gesamte Kernvolumen bei konstanter Massendichte folgendes Verhältnis:

$$\frac{I_z - I_x}{I_z + I_x} = \frac{e^{2\epsilon} - 1}{e^{2\epsilon} + 1} \approx \frac{\delta}{1 - \frac{1}{3}\delta} \quad (\text{IV.4})$$

wobei sich der erste Wert auf das im Anhang A skizzierte Nils-

sonmodell mit dem Deformationsparameter ξ bezieht, der zweite für das sonst übliche Modell mit dem Deformationsparameter δ gilt. Stimmt die Massenverteilung gut mit dem Potential überein, d.h. stimmt die Deformation der Massenverteilung gut mit der der Äquipotentialflächen überein, so kann das Verhältnis (IV.4) als Maß des inneren Quadrupolmoments des Kerns dienen. Weichen Massenverteilung und Potential voneinander ab, so wird das Verhältnis (IV.4) schlecht mit dem Erwartungswert von

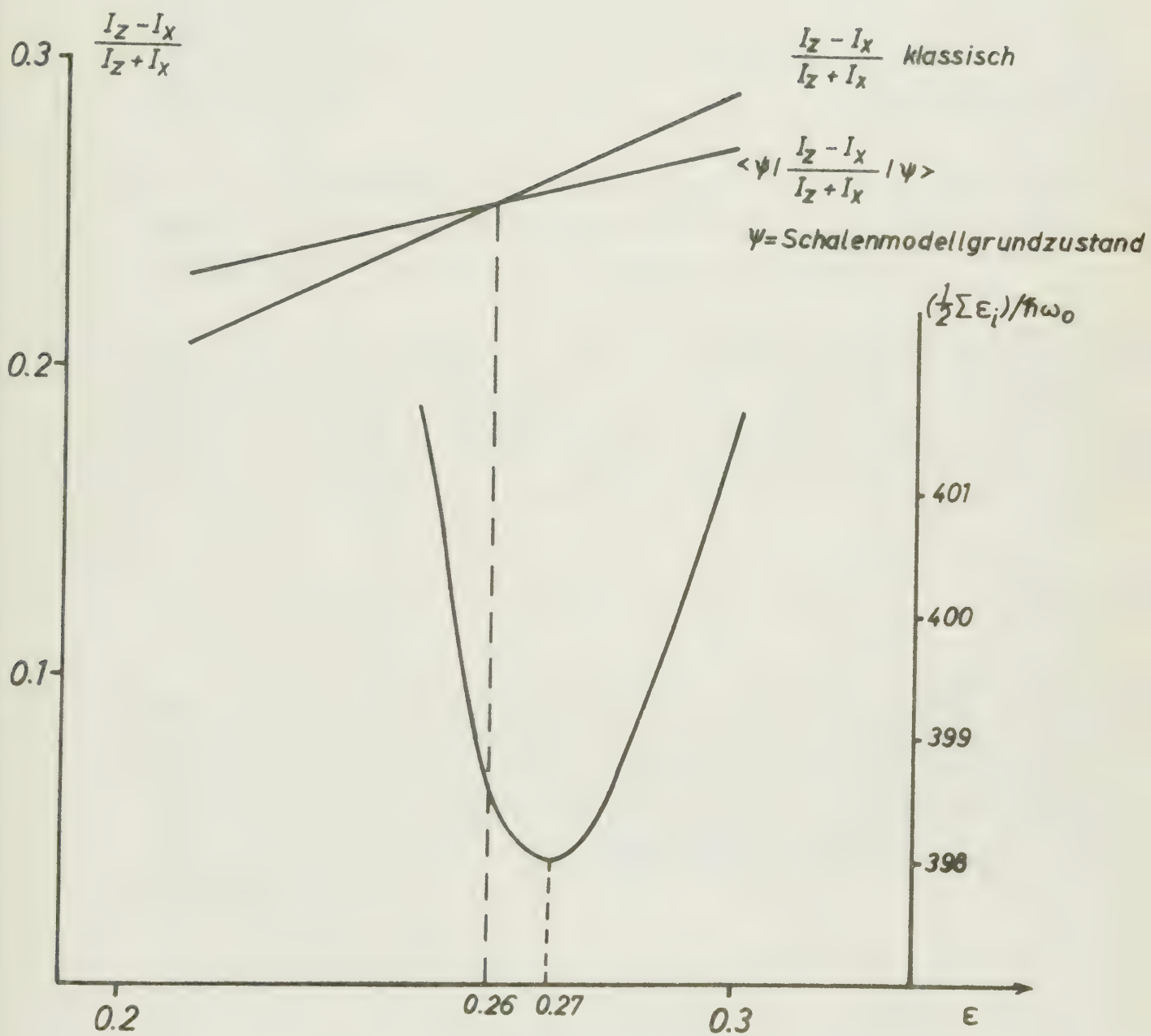
$$\frac{I_z - I_x}{I_z + I_x} \quad \text{im Schalenmodellgrundzustand } \psi_0.$$

$$\langle \psi_0 | \frac{I_z - I_x}{I_z + I_x} | \psi_0 \rangle \quad (\text{IV.5})$$

übereinstimmen. Für die Projektion der spuriosen Rotationsoszillationen ist es sinnvoll, Potential und Massenverteilung so weit wie möglich aufeinander anzupassen, damit die aus dem Potential stammenden Rückstellkräfte in optimaler Weise die Massenverteilung erfassen.

In Fig. 2 ist der klassische Wert (IV.4) und der quantenmechanische (IV.5) gegen den Deformationsparameter ξ aufgetragen. (Als Beispiel wurde Yb^{168} gewählt). Sie kommen bei $\xi \approx 0.26$ zur Deckung.

Gleichzeitig ist die kollektive Energiekurve aufgezeichnet, welche eine Grundzustandsdeformation von $\xi \approx 0.27$ ergibt. Beide Werte stimmen recht gut überein. Bei allen Rechnungen wurde $\xi \approx 0.27$ gewählt.



Figur 2

Im Vergleich dazu ergibt sich bei Ne^{20} 13), 22) für $\delta \approx 0.4$ Übereinstimmung zwischen (IV.4) und (IV.5), wohingegen das Energieminimum bei etwa $\delta \approx 0.3$ liegt. Wie bereits erwähnt, scheint das darauf zu deuten, daß Ne^{20} ein schlechter Rotator ist. Andererseits ist es möglich, daß bei leichten deformierten Kernen wegen der geringen Massenzahl Potentialverteilung und Massenverteilung immer stärker auseinanderklaffen als bei schweren Kernen. Insbesondere gilt dies für angeregte Zustände.

3. Weiterhin beschäftigt uns die Frage: Welche Terme des Nilssonmodells können spuriose Rotationsanteile in den Vielteilchenwellenfunktionen und deren Eigenwerten erzeugen?

Wir vernachlässigen die $\vec{l}_S$ und $\vec{l}^2$ -Terme und betrachten zunächst den dreidimensionalen harmonischen Oszillator im Hilfssystem, wobei wir die Schwerpunktsanteile wegen der in Teil I gemachten Feststellungen außer acht lassen. Dann läßt sich das Oszillatorpotential in folgender Form umschreiben:

$$\omega_x^2 (I_x + I_y) + \omega_z^2 I_z = \omega_x^2 (I_1 + I_2) + \omega_z^2 I_3 + (\omega_z^2 - \omega_x^2)(I_z - I_3) \quad (\text{IV.6})$$

Das aufs innere System transformierte Oszillatorpotential enthält wieder ein Oszillatorpotential in den Koordinaten $\mathbf{x}'_{1A}$ und ein Zusatzpotential, welches der Differenz der Größen I_z und I_3 proportional ist. Diese Differenz ist von der Größe der Eulerschen Winkel abhängig. Setzt man die Transformation (C.1) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} I_z - I_3 &= (I_1 - I_3) \sin^2 \gamma + (I_2 - I_3) \sin^2 \alpha \\ &\quad - (I_1 - I_3) \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha \sin^2 \gamma I_{12} \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

was bei kleinen Eulerschen Winkeln durch

$$I_z - I_3 \approx (I_1 - I_3) \gamma^2 + (I_2 - I_3) \alpha^2 \quad (\text{IV.8})$$

approximiert werden kann. Die für die Massenverteilung im Nilssonpotential enthaltenen Rückstellkräfte sind also harmonisch in den Eulerschen Winkeln.

Während sich $\mathfrak{J}_x^2$ und $\mathfrak{J}_y^2$ jeweils auf einen einzigen Freiheitsgrad beziehen, Änderungen der Bewegung in diesen Freiheitsgraden sich also stark in den Matrixelementen von $\mathfrak{J}_x^2$ und $\mathfrak{J}_y^2$ bemerkbar machen, sind in den Operatoren $(I_1 - I_3)$ und $(I_2 - I_3)$, welche Summen von Einteilchenoperatoren darstellen, jeweils sämtliche inneren Freiheitsgrade erfaßt. Schwankungen in wenigen inneren Freiheitsgraden werden sich also in ihren Matrixelementen nur durch relativ kleine Änderungen anzeigen. Diese Aussage ist identisch mit der früher gemachten Feststellung, daß die Massenverteilung des Kerns stabil gegen die Bewegungsänderung weniger Nukleonen bei guten Rotatoren ist, die Matrixelemente von $(I_1 - I_3)$ und $(I_2 - I_3)$ nur um etwa 2 - 3% schwanken. (Siehe unter der ersten Fragestellung in diesem Teil der Arbeit.)

Bei der Behandlung von $(I_z - I_3)$ aus (IV.8) können wir also die Ausdrücke $(I_1 - I_3)$ und $(I_2 - I_3)$ als konstant ansehen. Wir machen damit eine Vernachlässigung höherer Ordnung, vergleichbar der Näherung von $\Delta \mathfrak{J}$ durch $\mathfrak{J}$ bei kleinen Eulerschen Winkeln. Konsistenterweise müssen wir die Näherung gleichzeitig in beiden Termen vornehmen. Die Rückstellkräfte des Nilssonpotentials für die spuriosen Rotationsoszillationen sind daher reine harmonische Oszillationspotentiale in den Eulerschen Winkeln und vermischen in dieser Näherung nicht die innere mit der kollektiven Rotationsbewegung.

Bei der Transformation der Rückstellkräfte vom inneren aufs Hilfssystem müssen die Operatoren $(I_1 - I_3)$ und $(I_2 - I_3)$ wiederum konsistenterweise durch $(I_x - I_z)$ und $(I_y - I_z)$ ersetzt werden und die letzteren Operatoren als konstant angesehen werden, da sonst Terme in höherer als quadratischer Ordnung in den Eulerschen Winkeln ins Spiel kommen. Die Rückstellkräfte nehmen im Hilfssystem die Gestalt

$$(\omega_z^2 - \omega_x^2)(I_z - I_3) \approx$$

$$(\omega_z^2 - \omega_x^2) \{ (I_y - I_z) J_x^2 + (I_x - I_z) J_y^2 \} \quad (\text{IV.9})$$

an. Ersetzt man schließlich die Eulerschen Winkel durch die entsprechenden Terme in Nukleonenkoordinaten

$$J_x^2 = \frac{I_{xz}^2}{(I_y - I_z)^2} \quad J_y^2 = \frac{I_{xz}^2}{(I_x - I_z)^2} \quad (\text{IV.10})$$

so muß bei ihrer Behandlung in dieser Näherung wiederum der Nenner als konstant angesehen werden. Eine Behandlung der inversen Operatoren nach dem weiter oben geschilderten Verfahren erübrigt sich also in dieser Näherung und kommt erst in Betracht, wenn die Entwicklung zu höherer Ordnung in den Eulerschen Winkeln vorgenommen wird. Dann allerdings vervielfacht sich sofort der numerische Aufwand. Es ist daher wichtig, die hier geschilderte Theorie zur Projektion der spuriosen Rotationsoszillationen auf Kerne anzuwenden, die stark deformiert sind, gute Rotatoren sind und deren Massenverteilung relativ stabil gegen die Anregung weniger Nukleonen ist. Das werden in erster Linie deformierte Kerne sein.

Wir betrachten weiterhin die kinetische Energie des Vielteilchensystems in der Form (III.31) bis (III.33). Ähnlich wie die Rückstellpotentiale des Nilssonmodells als Korrektur des Potentials angesehen werden und daher zunächst näherungsweise behandelt werden, stellt $\tilde{T}_m$ eine Korrektur zur gesamten kinetischen Energie dar. Bei kleinen Eulerschen Winkeln können wir also in derselben Näherung wie beim Potential verfahren. Da I_{xy} von der gleichen Größenordnung wie I_{xz} und I_{yz} ist, kann auch I_{12} als kleine Größe angesehen werden. Wir können daher zur Abschätzung der spuriosen Rotationsanteile $\tilde{T}_m$ in der folgenden Form approximieren:

$$\tilde{T}_m \approx \frac{(L_1 - L'_1)^2}{2 \Theta_1} + \frac{(L_2 - L'_2)^2}{2 \Theta_2} \approx \frac{1}{2m} \left\{ \frac{N_1^2}{I_2 + I_3} + \frac{N_2^2}{I_1 + I_3} \right\} \quad (\text{IV.11})$$

Wiederum werden die Operatoren I_A als konstant angesehen. Konsistenterweise gilt dann in (IV.11) und (IV.8) in der gleichen Näherung auch $I_1 = I_2$, was für Zustände des axial-symmetrischen Potentials sehr gut erfüllt ist, und damit $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_0$.

Die Wirkung des Operators $\tilde{T}_m$ aus (IV.11) kann keineswegs dadurch abgeschätzt werden, daß man $L' \approx 0$ annimmt, wie das in Ref. 13), 14) geschieht. Wäre $L' \approx 0$, so würde sich $\tilde{T}_m$ bei kleinen Eulerschen Winkeln in der Form

$$\frac{1}{2\Theta_0} (L_1^2 + L_2^2) \approx -\hbar^2 \frac{1}{2\Theta_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta_2^2} \right) \quad (\text{IV.12})$$

darstellen lassen, wie man den Gleichungen (III.20) entnimmt. Damit würde das Nilssonmodell in $\tilde{T}_m$ aus (IV.11) und in dem Rückstellpotential (IV.8) einen harmonischen Oszillator für die Rotationsoszillationsbewegung enthalten. (Das Volumenelement im Raum der Eulerschen Winkel ist $d\Omega = |\sin \beta_1| d\beta_1 d\beta_2 \approx d\beta_1 d\beta_2$ für kleine Eulersche Winkel, siehe Ref. 13)). Dieser Operator würde mit $\tilde{H}_m$ kommutieren und es wäre die gleiche einfache Situation wie bei der Schwerpunktsbewegung hergestellt. Insbesondere würde sich bei schweren deformierten Kernen ein Projektionsverfahren erübrigen.

Wenn also $L' \neq 0$ ist, wie wir sogleich beweisen werden, muß dann mit einer großen Mischung der inneren und der Rotationsoszillationsbewegung durch den Operator $\tilde{T}_m$ gerechnet werden? Aufgrund eines kohärenten Zusammenhangs von L' mit L ist das nicht der Fall.

Transformiert man von den Koordinaten x'_{1A} und Impulsen p_{1A} auf dimensionslose Koordinaten $\tilde{x}'_{1A}$ und Impulse $\tilde{p}_{1A}$, wie es im Anhang A beschrieben wird, so ergibt sich für den Gesamtdrehimpuls:

$$L_1 = -i\hbar \sum_i (\chi \tilde{x}_{i2} \tilde{p}_{i3} - \chi^{-1} \tilde{x}_{i3} \tilde{p}_{i2}) \quad L_2 = -i\hbar \sum_i (\chi^{-1} \tilde{x}_{i3} \tilde{p}_{i2} - \chi \tilde{x}_{i2} \tilde{p}_{i3}) \quad (\text{IV.13})$$

mit
$$\chi = \sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}} = e^{-\varepsilon/2}$$

Der innere Drehimpuls L' läßt sich aufgrund der obigen Näherungen ($I_{12} \approx 0$) nach Gleichung (III.26) folgendermaßen darstellen:

$$L'_1 = -i\hbar g \sum_i (\sigma x'_{i2} p_{i3} - \sigma^{-1} x'_{i3} p_{i2}) \quad L'_2 = -i\hbar g \sum_i (\sigma^{-1} x'_{i3} p_{i2} - \sigma x'_{i2} p_{i3}) \quad (\text{IV.14})$$

mit

$$g = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} = \frac{2\sqrt{I_2 I_1}}{I_2 + I_1} ; \quad \sigma = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} = \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \quad (\text{IV.15})$$

Für die Faktoren g und σ benutzen wir die oben angeführte klassische Berechnung der Massenverteilung, was bei schweren deformierten Kernen, wie wir gesehen haben, eine gute Näherung ist. Nach Transformation auf dimensionslose Koordinaten ergibt sich dann für den inneren Drehimpuls

$$L'_1 = -i\hbar g' \sum_i (\chi^{-1} \tilde{x}_{i2} \tilde{p}_{i3} - \chi \tilde{x}_{i3} \tilde{p}_{i2}) \quad L'_2 = -i\hbar g' \sum_i (\chi \tilde{x}_{i3} \tilde{p}_{i2} - \chi^{-1} \tilde{x}_{i2} \tilde{p}_{i3}) \quad (\text{IV.16})$$

mit

$$g' = \frac{2}{e^\varepsilon + e^{-\varepsilon}} \quad (\text{IV.17})$$

Die Komponenten von L und L' unterscheiden sich also lediglich durch den Faktor g' und dadurch, daß in ihnen χ und χ^{-1} ihre Rolle vertauscht haben. Transformiert man L und L' aufs Hilfsystem, so kann man ihre Matrixelemente mit den Wellenfunktionen der Hilfssystemkoordinaten berechnen. Wie man den Formeln (B3) und (B5) des Anhangs B entnimmt, sind die Matrixelemente

des Bahndrehimpulses, die keine N-Schalenmischung bewirken, invariant gegen eine Vertauschung von χ mit χ^{-1} . Matrixelemente, welche die N-Schalen mischen, wechseln dabei ihr Vorzeichen. Daher gilt im Sinne der obigen Näherung für Erwartungswerte von L und L'

$$\langle L'^2 \rangle \approx \langle L_1^2 + L_2^2 \rangle \approx \langle L_1'^2 + L_2'^2 \rangle \quad (\text{IV.18})$$

wobei $\langle L'^2 \rangle \approx 0.92$ bei $\epsilon \approx 0.27$ ist. Gleichzeitig erhält man für $I_{12} \approx 0$ aus (III.26)

$$L_1'^2 + L_2'^2 = L_1^2 + L_2^2 + \frac{(I_1 - I_2)^2}{(I_1 + I_2)^2} (N_1^2 + N_2^2) + \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} (L_1 N_1 + N_1 L_1 - L_2 N_2 - N_2 L_2) \quad (\text{IV.19})$$

wobei nach (IV.11) gilt:

$$\frac{(I_1 - I_2)^2}{(I_1 + I_2)^2} (N_1^2 + N_2^2) \approx (L_1 - L_1')^2 + (L_2 - L_2')^2 \quad (\text{IV.20})$$

Die rechte Seite von (IV.19) läßt sich auf das Hilfssystem transformieren. Auf diese Weise kann man die Matrixelemente von $(L_1^2 + L_2^2)$, $(L_1 - L_1')^2 + (L_2 - L_2')^2$ und von $(L_1'^2 + L_2'^2)$ berechnen.

Tabelle I bringt diese Matrixelemente für verschiedene Vielteilchenzustände des Nilssonmodells in Yb¹⁶⁸. Man erkennt, daß die Proportionalität (IV.18) zwischen $(L_1^2 + L_2^2)$ und $(L_1'^2 + L_2'^2)$ sehr gut erfüllt ist. Der innere Drehimpuls folgt in seinen Schwankungen vollständig dem Gesamtdrehimpuls der Rotationsoszillationsbewegung. Beide Drehimpulsquadrate nehmen große Werte zwischen 150 und 200 an, was einem Betrag des Drehimpulses von etwa 12 bis 14 entspricht. Die Größe des Drehimpulses ist aufgrund der Unschärferelation zu erwarten, da die Rotationsoszillationen bei schweren deformierten Kernen um kleine Eulersche Winkel stattfinden. Die Erwartungswerte von J_x^2 und J_y^2 aus

(IV.10) liegen etwa bei $(5^\circ)^2$.

T A B E L L E 1
=====

$\langle L_1^2 + L_2^2 \rangle$	$\left\langle \begin{array}{l} (L_1 - L_1')^2 + \\ (L_2 - L_2')^2 \end{array} \right\rangle$	$\langle L_1'^2 + L_2'^2 \rangle$
206.57	78.26	189.66
163.34	78.11	149.42
153.62	78.10	140.36
191.64	78.19	175.76
201.03	78.24	184.50
201.99	78.22	185.40
153.99	78.09	140.71
193.39	78.52	177.39
193.90	78.53	177.86
206.69	78.28	189.77
158.87	78.02	145.25
168.59	78.11	154.31
203.01	78.19	186.35
176.91	77.89	162.06
217.51	78.35	199.85
160.20	78.09	146.49
194.43	78.54	178.35
192.87	78.51	176.89

Da der innere Drehimpuls L' gut dem Gesamtdrehimpuls L der Rotationsoszillationen folgt, liegt die Vermutung nahe, daß sich ihre Schwankungen in der Differenz $(L-L')$ nahezu herausheben. In der Tat entnimmt man der Tabelle I, daß der Term $(L_1 - L_1')^2 + (L_2 - L_2')^2$ über die verschiedensten Zustände hinweg nahezu kon-

stant ist. Gleichzeitig erweisen sich die nichtdiagonalen Matrixelemente dieses Operators als sehr klein. Das bedeutet, daß der Term $\tilde{T}_{m1}$, der sich aus der Transformation der kinetischen Energie aus dem Hilffssystem ins innere System ergibt, für Zustände des axialsymmetrischen Potentials nahezu konstant ist und keine kollektive kinetische Energie im Sinne der Gleichung (IV.12) darstellt.

Es bleibt die Frage, welchen Einfluß die $\vec{\ell} \vec{s}$ - und $\vec{\ell}^2$ -Terme haben. Bezüglich dieser Terme ist man vollständig auf die numerischen Rechnungen angewiesen. Um ihren Einfluß zu erkennen, muß man diese Terme in den Koordinaten X'_{iA} und p'_{iA} ansetzen, sodaß sie reine innere Terme werden, und die Rechnungen mit denen vergleichen, wo $\vec{\ell} \vec{s}$ - und $\vec{\ell}^2$ -Term im Hilffssystem angesetzt werden. Diese Rechnungen stehen noch aus, da sie numerisch sehr aufwendig sind.

IV.2. Formulierung eines neuen Projektionsverfahrens für die Vielteilchenfunktionen des Nilssonmodells

Wir fassen die Ergebnisse des Teils IV.1. zusammen und ziehen daraus Schlußfolgerungen:

Es hatte sich gezeigt, daß bei schweren deformierten Kernen die Massenverteilung in hohem Maße stabil gegen die Anregung weniger Nukleonen ist. Das berechtigte uns zu verschiedenen Näherungen (Trägheitsmomente sind konstant, $I_{12} \approx 0$), die verbessert werden können, wie wir geschildert haben, die aber nichts an den grundsätzlichen Überlegungen ändern. Es läßt sich der anisotrope harmonische Oszillator in diesen Näherungen in folgender Weise vom Hilfssystem aufs innere System transformieren:

$$H_N = T + V_N = \sum_{i,n} \frac{p_{in}^2}{2m} + \frac{m}{2} \{ \omega_x^2 (I_x + I_y) + \omega_z^2 I_z \} =$$

$$= \tilde{T}_{in} + \tilde{V}_{in} + \tilde{T}_{rot} + \tilde{V}_R \quad (\text{IV.21})$$

$$= \tilde{T}_{in} + \frac{m}{2} \{ \omega_x^2 (I_x + I_y) + \omega_z^2 I_z \} + \frac{1}{2\Theta} \{ (L_x - L'_x)^2 + (L_y - L'_y)^2 \} + (\omega_z^2 - \omega_x^2) (I_x - I_y) (\mathfrak{J}_x^2 + \mathfrak{J}_y^2)$$

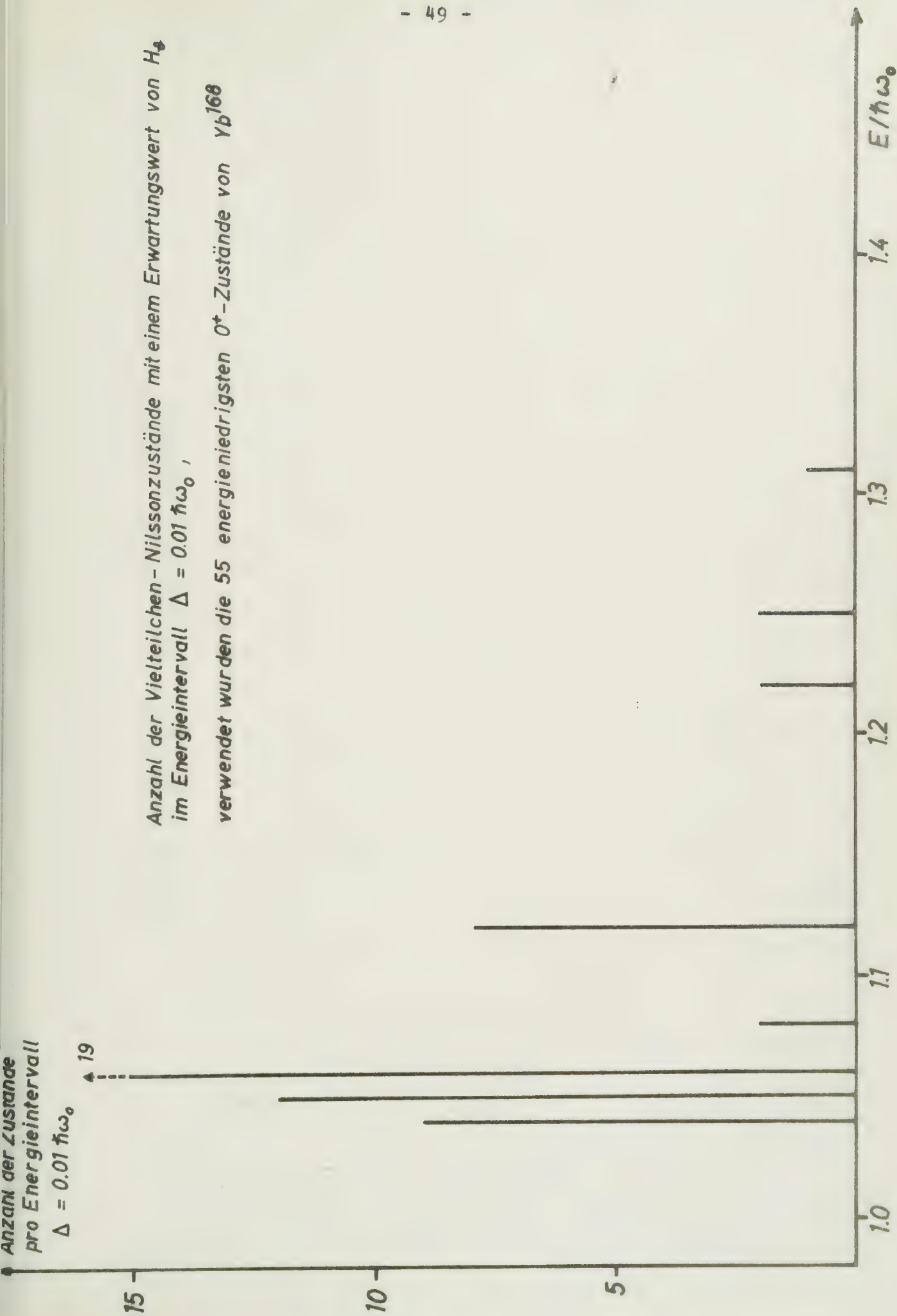
wobei wir $\tilde{T}_{rot}$ hier außer Betracht gelassen haben und $\tilde{T}_{in}$ aus (III.32) stammt. $\tilde{H}_{in} = \tilde{T}_{in} + \tilde{V}_{in}$ ist der Hamiltonoperator für die innere Bewegung des Nukleonensystems, $\tilde{T}_{rot}$ bildet für die Zustände des Nilssonoperators H_N nahezu eine Konstante, $\tilde{V}_R(\mathfrak{J}_x, \mathfrak{J}_y)$ stellt das Rückstellpotential für die Rotationsoszillationen dar und greift in dieser Näherung nicht die innere Bewegung an. Die Schwankungen der Winkel $\mathfrak{J}_x^2$ und $\mathfrak{J}_y^2$ von Zustand zu Zustand sind relativ gering und betragen maximal 5%. Die diagonalen Matrixelemente von $\tilde{V}_R$ schwanken um maximal 40-50 keV; gegenüber dem gesamten Operator H_N , dessen Eigenwerte größer als 1 MeV sein kann $\tilde{V}_R$ als kleine Störung angesehen werden.

Aus diesen Ergebnissen ergibt sich die Schlußfolgerung, daß die Vielteilchenfunktionen von H_N bereits eine gute Approximation der Eigenfunktionen von $\tilde{H}_{in}$ darstellen. Sie enthalten also im wesentlichen nur eine Komponente $\Psi_n^{(u)}(\vec{r}_i) \approx \tilde{\Phi}^{(u)}(\vec{r}_j) \cdot \chi_n(\xi_v)$ welche aus einer Eigenfunktion von H_{in} besteht, die mit einer Funktion der Eulerschen Winkel multipliziert ist. Bildet man nun den Operator

$$\bar{H} = \tilde{H}_{in}(\xi_v, \vec{r}_i) + \tilde{H}_r(\vec{r}_j, \vec{J}) = H_{in}(\vec{r}_i, \vec{p}_i) + H_r(\vec{r}_i, \vec{p}_i) \quad (IV.22)$$

mit $\tilde{H}_r$ aus (II.17) und diagonalisiert diesen in den Eigenfunktionen von H_N aus (IV.21), so führen wir damit nicht die gewünschte Projektion durch, d.h. wir erhalten keine Funktionen, die gleichzeitig Eigenfunktionen zu $\tilde{H}_{in}$ und $\tilde{H}_r$ sind, wie das im Verfahren von Scheid (siehe Teil II.1) erreicht werden soll. Der Operator $\tilde{H}_r$ wirkt nämlich nur auf den Teil $\tilde{\Phi}^{(u)}(\vec{r}_j)$ der Funktionen $\Psi_n^{(u)}(\vec{r}_i) = \tilde{\Phi}^{(u)}(\vec{r}_j) \chi_n(\xi_v)$ und daher verschwinden alle nichtdiagonalen Matrixelemente von $\tilde{H}_r$ aufgrund der Orthogonalität der inneren Eigenfunktionen $\chi_n(\xi_v)$. In der Tat zeigt sich, wenn man die Matrix von H_r in den Eigenfunktionen von H_N aufstellt, daß kaum von Null verschiedene nichtdiagonale Matrixelemente auftreten. Unter den 100 energieniedrigsten 0^+ -Zuständen des Nilssonoperators bei Yb^{168} koppeln z.B. mehr als die Hälfte über H_r an überhaupt keinen Zustand an. Die Vielteilchenfunktionen des Nilssonoperators, aus denen wir die Rotationsoszillationen herausprojizieren wollen, bilden daher die denkbar ungeeignetste Basis für das Projektionsverfahren selber. Es ist theoretisch klar und man kann sich numerisch davon überzeugen, daß die benötigten Diagonalisierungen absolut schlecht konvergieren. In Figur 3 haben wir die Anzahl der Nilssonzustände mit einem Erwartungswert von H_r im Energieintervall $\Delta = 0,01 \hbar \omega$ aufgetragen. Es wurden die 55 energieniedrigsten 0^+ -Zustände von Yb^{168} gewählt. $\tilde{H}_r$ aus (II.17) bestand aus dem Rückstellpotential wie es sich aus dem Nilssonmodell ergibt, Gleichung (IV.9), das Trägheitsmoment $\frac{1}{\lambda}$ wurde so gewählt, daß im Mittel für alle Zu-

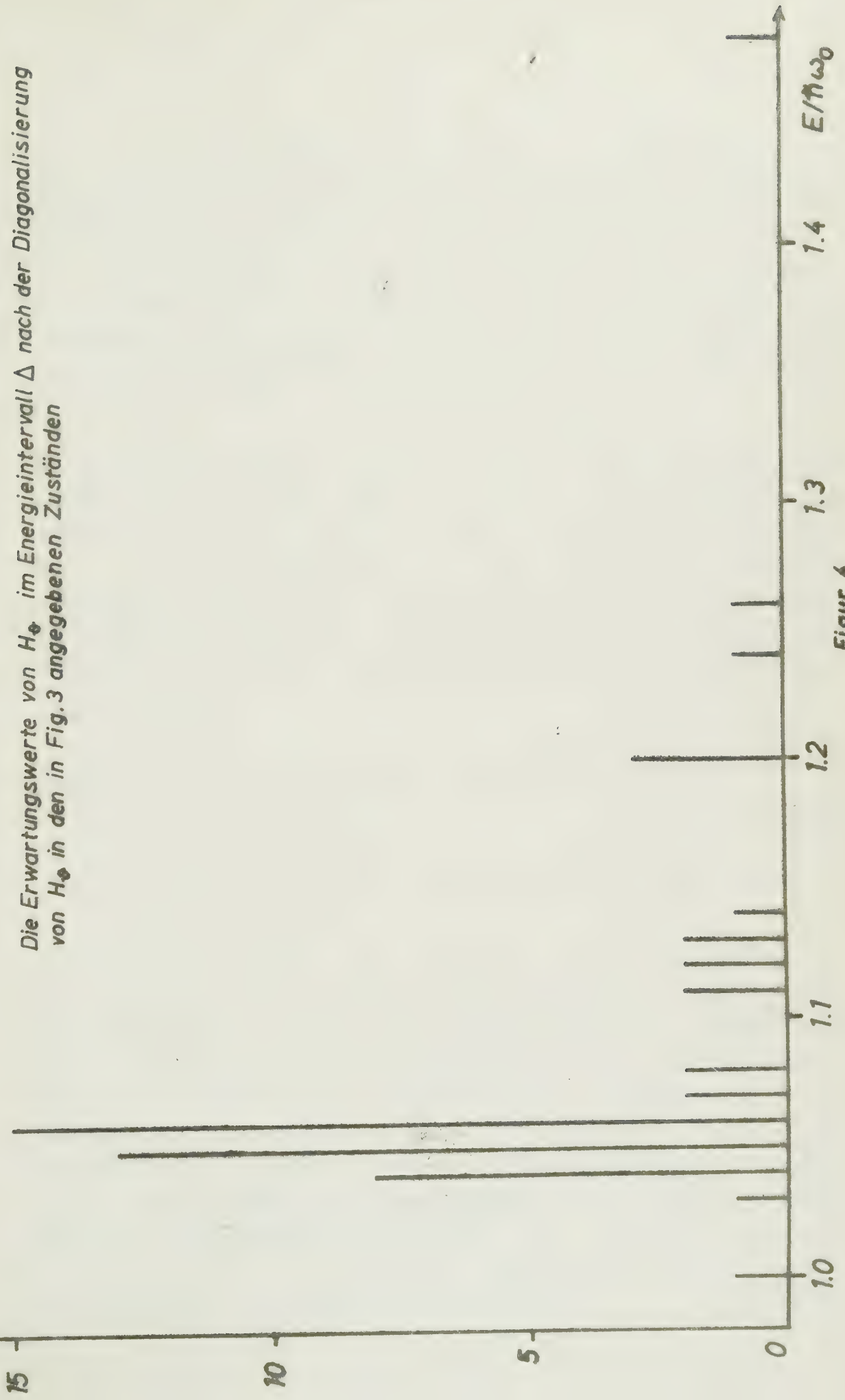
stände der Virialsatz erfüllt ist, da $\tilde{H}_J$ ein harmonischer Oszillator ist. Bei dieser Wahl der Konstanten λ und Ω liegt der Grundzustand von $\tilde{H}_J$ bei $0,75 \hbar \omega$. Wie man in Fig. 3 erkennt, liegen alle 55 Zustände zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten Zustand von $\tilde{H}_J$. In Fig. 4 ist die Situation nach der Diagonalisierung von $\tilde{H}_J$ dargestellt. Es zeigt sich, daß ein Zustand in Richtung des Grundzustandes sich verschoben hat und ein Zustand etwa mit dem ersten angeregten Zustand von $\tilde{H}_J$ zusammenfällt, im übrigen ist das Bild etwa das Gleiche geblieben. Die Diagonalisierung von $\tilde{H}_J$ verbessert sich nur unwesentlich, wenn etwa die doppelte Anzahl von Zuständen benutzt wird. In diesem Sinne kann von einer extrem schlechten Konvergenz, auf die Eigenwerte von $\tilde{H}_J$ zu, gesprochen werden.



Figur 3

Anzahl der Zustände
pro Energieintervall
 $\Delta = 0.01 \hbar \omega_0$

Die Erwartungswerte von H_Φ im Energieintervall Δ nach der Diagonalisierung
von H_Φ in den in Fig. 3 angegebenen Zuständen



Figur 4

Es erhebt sich also die Frage, wie man auf andere Weise projizieren kann. Es ist klar, daß die Klassifizierung der Zustände nach Eigenzuständen eines anderen kollektiven Operators als $\tilde{H}_\sigma$ in die gleichen Schwierigkeiten führen muß. Wir schlagen daher einen anderen einfachen Weg vor, der zwar nicht zur Herausprojektion der spurlosen Rotationsanteile in den Vielteilchenfunktionen im eigentlichen Sinne führt, dafür aber eine genaue Kenntnis dieser Rotationsanteile verschafft.

Da die Eigenfunktionen des Nilssonmodells schon eine gute Approximation der Eigenfunktionen von $\tilde{H}_{in}$ sind, ist es leicht, sich zunächst diese zu verschaffen. Wir lösen die Gleichung (III.31) nach T_{in} auf und übersetzen $\tilde{T}_{in}$ aus (III.34) aufs Hilfssystem. Ebenso verfahren wir mit den Rückstellpotentialen $\tilde{V}_R$ aus (IV.21). Es entsteht in sehr guter Näherung, die bei späteren Rechnungen verbessert werden wird. (Nichtkonstanz der Operatoren $I_z - I_x$, $I_z + I_x$, $I_{12} \neq 0$),

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{in}(\xi_v, \tau_v) = H_{in}(\vec{r}_i, \vec{p}_i) = \sum_{i=1}^2 \frac{p_{i\alpha}^2}{2m} + \frac{m}{2} \{ \omega_x^2 (I_x + I_y) + \omega_z^2 I_z \} \\ - \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{I_x + I_z} (N_x^2 + N_y^2) - (\omega_z^2 - \omega_x^2) (I_x - I_z) (N_x^2 + N_y^2) \end{aligned} \quad (IV.23)$$

Diese Näherung ist gut, weil der zweite und dritte Term von (IV.23) bereits eine kleine Störung gegenüber dem ersten, dem Nilssonoperator, ist, wie wir gesehen haben. Man diagonalisiert nun $H_{in}(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$ in den Eigenfunktionen des Nilssonoperators. Da die Projektion Ω des Gesamtspins und die Parität π bei der Diagonalisierung erhalten bleiben, beschränkt man sich auf Wellenfunktionen zu gutem Ω und π . Die diagonalisierten Funktionen $\psi_\Omega(\vec{r}_i)$ müssen auf die Koordinaten ξ_v und η_j transformiert in folgender Form separieren:

$$\psi_\Omega(\vec{r}_i) = \Phi^{(\Omega)}(\eta_j) \cdot \chi_{nk}(\xi_v) \quad (IV.24)$$

wobei $\chi_{n\kappa}(\varphi_s)$ eine Eigenfunktion von $\tilde{H}_{in}$ ist und, da $\tilde{H}_{in}$ mit L'_3 kommutiert (siehe Gleichung (III.42)), gleichzeitig eine Eigenfunktion von L'_3 zu guter Quantenzahl K ist. Die $\Phi^{(\omega)}(\varphi_s)$ sind zunächst unbestimmte Funktionen der Eulerschen Winkel φ_x und φ_y .

Nachdem es gelungen ist, die Eigenfunktionen $\chi_{n\kappa}$ von $\tilde{H}_{in}$ zu berechnen, müssen die Funktionen $\Phi^{(\omega)}(\varphi_s)$ bestimmt werden. Diese Funktionen werden von dem kollektiven Rotationsanteilen in den Nilssonwellenfunktionen abhängig sein. Über diese spuriosen Anteile hatten wir uns durch die Erwartungswerte von $\tilde{H}_s$ in Fig. 3 einige Aussagen verschafft. Wir benutzen deshalb auch jetzt einen Operator

$$H_s = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\hbar^2}{\Theta_{eff}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi_y^2} \right) + \alpha^2 (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \right\} \quad (IV.25)$$

Die Konstante α^2 wird so gewählt, daß sie optimal mit der Frequenz des Rückstellpotentials in (IV.23) übereinstimmt, also $\alpha^2 = (\omega_1^2 - \omega_2^2) \langle (I_z - I_x) \rangle$, wobei $\langle (I_z - I_x) \rangle$ der über alle verwendeten Zustände gemittelte Erwartungswert ist. Θ_{eff} legen wir so fest, daß für alle Zustände im Mittel der Virialsatz bezüglich des harmonischen Oszillators (IV.25) erfüllt ist. φ_x^2 und φ_y^2 werden nach (IV.10) auf Nukleonenkoordinaten übersetzt. Aus den Transformationsgleichungen (C.1) berechnet man sich die Übersetzung von $\frac{\partial}{\partial \varphi_x}$ und $\frac{\partial}{\partial \varphi_y}$:

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi_x} = L_x \quad (IV.26)$$

$$\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi_y} = \cos \varphi_x L_y + \sin \varphi_x L_z$$

was für sehr kleine Eulersche Winkel mit der früher angenommenen Übersetzung $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi_x} = L_x$ und $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \varphi_y} = L_y$ übereinstimmt. Wir transformieren die Eulerschen Winkel φ_x und φ_y auf Polar-

koordinaten

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J} \cos \varphi \qquad \mathcal{J}_y = \mathcal{J} \sin \varphi \qquad (\text{IV.27})$$

und geben die Eigenfunktionen $\Phi_{n_\perp, M}(\mathcal{J}, \varphi)$ von $H_{\mathcal{J}}$ aus (IV.25) in der Form (A.7) des Anhangs A an. Diese Funktionen sind durch eine gute Projektionsquantenzahl M charakterisiert und durch die Energiequantenzahl $n_\perp$. $\Phi_{n_\perp, M}$ hat den Eigenwert $S_{n_\perp} = \hbar \tilde{\omega} (n_\perp + 1)$ bezüglich $H_{\mathcal{J}}$, wobei $\tilde{\omega}$ die Frequenz des zweidimensionalen harmonischen Oszillators $H_{\mathcal{J}}$ ist.

Es läßt sich nun $\bar{\Phi}^{(\alpha)}(\mathcal{J}_j)$ aus (IV.24) nach den Eigenfunktionen $\Phi_{n_\perp, M}$ von $H_{\mathcal{J}}$ entwickeln:

$$\bar{\Phi}^{(\alpha)}(\mathcal{J}_j) = \sum_{n_\perp, M} a_{n_\perp, M}^{(\alpha)} \Phi_{n_\perp, M}(\mathcal{J}, \varphi) \qquad (\text{IV.28})$$

Die Bestimmung von $\bar{\Phi}^{(\alpha)}(\mathcal{J}_j)$ läuft so auf eine Bestimmung der Koeffizienten $a_{n_\perp, M}^{(\alpha)}$ hinaus. Wir betrachten nun den Drehimpulsoperator L_z und transformieren ihn ins innere System. Unter Verwendung von (C.1) und (III.20) ergibt sich für kleine Eulersche Winkel

$$\begin{aligned} L_z &= \sum_A R_{Az} L_A = -\cos \mathcal{J}_x \sin \mathcal{J}_y L_1 + \sin \mathcal{J}_x L_2 + \cos \mathcal{J}_x \cos \mathcal{J}_y L_3 \\ &= -\frac{\hbar}{i} \cos \mathcal{J}_x \tan \mathcal{J}_y \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}_x} + \cos \mathcal{J}_x \sin \mathcal{J}_y \tan \mathcal{J}_y L_3 + \frac{\hbar}{i} \sin \mathcal{J}_x \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}_y} + \cos \mathcal{J}_x \cos \mathcal{J}_y L_3 \quad (\text{IV.29}) \\ &\approx L_3 + \frac{\hbar}{i} \left(\mathcal{J}_x \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}_y} - \mathcal{J}_y \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}_x} \right) = L_3 + \mathcal{L}_z \end{aligned}$$

wobei der Operator

$$\mathcal{L}_z = \frac{\hbar}{i} \left(\mathcal{J}_x \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}_y} - \mathcal{J}_y \frac{\partial}{\partial \mathcal{J}_x} \right) \qquad (\text{IV.30})$$

wie die z-Komponente eines Drehimpulses auf die Funktionen $\Phi_{n_1, n}$ wirkt

$$\mathcal{L}_z \Phi_{n_1, n}(\vartheta, \varphi) = M \Phi_{n_1, n}(\vartheta, \varphi) \quad (\text{IV.31})$$

Wir wenden L_z auf Ψ_a aus (IV.24) an:

$$L_z \Psi_a^{n_k k} = \Omega \Psi_a^{n_k k} = (L'_z + \mathcal{L}_z) \Phi^{(a)}(\vartheta_j) \chi_{n_k}(\varphi_j) \quad (\text{IV.32})$$

$$= (L'_z + \mathcal{L}_z) \sum a_{n_1, n}^{(a)} \Phi_{n_1, n} \chi_{n_k} = \sum a_{n_1, n}^{(a)} (M + K) \Phi_{n_1, n} \chi_{n_k}$$

Diese Gleichung läßt sich nur erfüllen, wenn alle $\Phi_{n_1, n}$ zur gleichen Quantenzahl M gehören und wenn

$$\Omega = M + K \quad (\text{IV.33})$$

ist. Daher haben die Funktionen $\Phi^{(a)}(\vartheta_j)$ aus (IV.28) die Gestalt

$$\Phi^{(a)}(\vartheta_j) = \sum_{n_1} a_{n_1}^{(a)} \Phi_{n_1, n}(\vartheta, \varphi) \quad (\text{IV.34})$$

wobei keine Summation über M mehr auftritt. Da M immer gerade ist, wenn n_1 gerade ist, und M ungerade, wenn n_1 ungerade, läuft die Summe in (IV.34) weiterhin nur über gerade oder nur über ungerade Quantenzahlen n_1 . Anhand der geraden-geraden Ytterbium-isotope wurde überprüft, daß die Erwartungswerte von H_J in den Vielteilchenfunktionen des Nilssonmodells bis zu Anregungsenergien von etwa 3 MeV immer zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten Zustand von H_J liegen. Dieses Ergebnis dürfte für alle schweren deformierten Kerne, die gute Rotatoren sind, richtig sein. Daher enthält die Funktion $\Phi^{(a)}(\vartheta_j)$ aus (IV.34) wesentlich den Grundzustand $\Phi_{0,0}$ von H_J und im übrigen nur die Funktionen $\Phi_{n_1, 0}$, wobei n_1 gerade ist. Es folgt daher

$$\Phi^{(\omega)}(\vec{r}_j) = \sum_{n_1} a_{n_1}^{(\omega)} \phi_{n_1,0}(\vec{r}, \varphi) ; n_1 \text{ gerade} \quad (\text{IV.35})$$

und

$$\Omega = K \quad (\text{IV.36})$$

für die niederenergetischen Zustände der schweren deformierten Kerne. Schließlich läßt sich die Summe über n_1 in (IV.35) aus energetischen Gründen beschneiden. Während bezüglich des Operators $\tilde{H}_{in}$ uns Anregungszustände bis etwa 3 MeV interessieren, liegt der zweite angeregte Zustand von $H_{\vec{r}}$ um $2 \hbar \tilde{\Omega} \approx 1,5 \hbar \omega \approx 9 \text{ MeV}$ über dem Grundzustand von $H_{\vec{r}}$. Es ist daher sicher eine gute Näherung, in Gleichung (IV.35) mit einer Überlagerung der Zustände ϕ_{00} , ϕ_{20} und ϕ_{40} zu rechnen. Die Bestimmung von $\Phi^{(\omega)}(\vec{r}_j)$ bedeutet also die Bestimmung dieser drei Komponenten. Die Funktionen (IV.24) lassen sich dann in der Gestalt:

$$\Psi_{nK}^{(\omega)}(\vec{r}_i) = (a_0^{(\omega)} \phi_{00} + a_2^{(\omega)} \phi_{20} + a_4^{(\omega)} \phi_{40}) \chi_{nK} \quad (\text{IV.37})$$

darstellen.

Wir ziehen nun die Kenntnis der Erwartungswerte von $H_{\vec{r}}$ und seines kinetischen und potentiellen Anteils in den Funktionen $\Psi_{nK}^{(\omega)}(\vec{r}_i)$ zur Bestimmung der Koeffizienten $a_0^{(\omega)}$, $a_2^{(\omega)}$, $a_4^{(\omega)}$

heran. Es bezeichne

$$E = \langle \Psi_{nK} | \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_{eff}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right) + \Omega^2 (x_i^2 + y_j^2) \right\} | \Psi_{nK} \rangle \quad (\text{IV.38})$$

$$\Delta E = \langle \Psi_{nK} | \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_{eff}} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right) - \Omega^2 (x_i^2 + y_j^2) \right\} | \Psi_{nK} \rangle \quad (\text{IV.39})$$

Die Funktionen $\psi_{nk}^{(\alpha)}$ haben wir durch Diagonalisierung des Operators H_{in} aus (IV.23) in Vielteilchenhilssonwellenfunktionen gewonnen. Mit ihrer Hilfe können wir E und ΔE berechnen. Da wir die Struktur von $\psi_{nk}^{(\alpha)}$ aus (IV.37) kennen, können diese Erwartungswerte auch theoretisch berechnet werden. Es ergibt sich, wenn wir E und ΔE in Einheiten von $\hbar \tilde{\omega}$, der Frequenz von $H_{\mathcal{F}}$, angeben:

$$E = a_0^2 + 3 a_2^2 + 5 a_4^2 \quad (\text{IV.40})$$

$$\Delta E = 2 a_2 (a_0 + 2 a_4) \quad (\text{IV.41})$$

Als dritte Bestimmungsgleichung verbleibt die Normierung von $\Phi^{(\alpha)}$

$$1 = a_0^2 + a_2^2 + a_4^2 \quad (\text{IV.42})$$

Löst man diese Gleichungen nach a_0 auf, so ergibt sich eine Gleichung 4. Grades in a_0^2 :

$$\alpha_4 a_0^8 + \alpha_3 a_0^6 + \alpha_2 a_0^4 + \alpha_1 a_0^2 + \alpha_0 = 0$$

$$\alpha_4 = 144 \quad \alpha_3 = 256(4-E) - 40\beta \quad \alpha_2 = 20\gamma + \beta^2 - 16(5-E) \quad (\text{IV.43})$$

(17-5E)

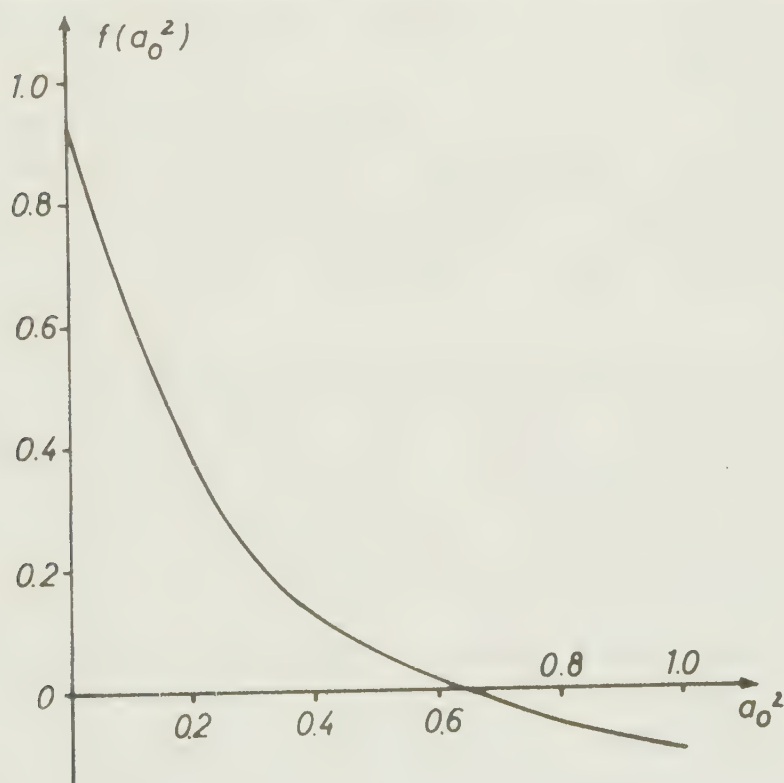
$$\alpha_1 = 8(3-E)(5-E)^2 - \beta\gamma \quad \alpha_0 = \frac{1}{4}\gamma^2$$

$$\beta = 49 - 13E \quad \gamma = (\Delta E)^2 + 4(3-E)(5-E)$$

Da die Erwartungswerte etwa zwischen 1,3 bis 1,5 $\hbar \tilde{\omega}$ liegen, erwarten wir, daß der Grundzustand Φ_0 mit einer wesentlichen Komponente in den ψ_{nk} enthalten ist. a_0^2 wird daher zwischen 0,5 und 1,0 liegen. Man sucht numerisch die Nullstelle der Funktion

$$f(a_0^2) = \alpha_4 a_0^8 + \alpha_3 a_0^6 + \alpha_2 a_0^4 + \alpha_1 a_0^2 + \alpha_0 \quad (\text{IV.44})$$

in diesem Intervall und bestimmt so a_0^2 . In Fig.5 ist dieses Verfahren graphisch veranschaulicht. Es wurde $f(a_0^2)$ gegen a_0^2 aufgetragen, wobei $E = 1,4 \hbar \tilde{\omega}$ und $\Delta E = 0,2 \hbar \tilde{\omega}$ gewählt wurde. Die meisten Erwartungswerte ΔE erweisen sich kleiner als $0,2 \hbar \tilde{\omega}$. Wie man erkennt, hätte man für dieses Beispiel in $\Phi^{(u)}(\tilde{r}_j)$ den Grundzustand Φ_{00} von $H_{\downarrow}$ mit einer Amplitude von etwa 67% beigemischt.



Figur 5

Da die Funktion $\Phi^{(u)}(\tilde{r}_j)$ nur bis auf eine Phase bestimmt ist, kann man in allen Φ die Konstante $a_0 > 0$ wählen. Dann lassen sich aus den Gleichungen (IV.40) und (IV.42) a_0^2 und a_4^2 und aus

(IV.41) das Vorzeichen von a_2 und a_4 bestimmen.

Durch Diagonalisierung von $\tilde{H}_{in}$ aus (IV.23) haben wir also folgendes Funktionssystem $\psi_{nk}^{(\omega)}(\vec{r}_i)$ (IV.37), erhalten: Wir wissen, daß der Eigenwert von $\tilde{H}_{in}(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$ in den $\psi_{nk}^{(\omega)}(\vec{r}_i)$ dem Eigenwert von $\tilde{H}_{in}(\xi_i, \eta_i)$ in den $\chi_{nk}(\xi_i)$ gleich ist. Wir kennen weiter die Struktur der $\psi_{nk}^{(\omega)}(\vec{r}_i)$; sie separieren in einen kollektiven und einen inneren Anteil. Der innere Anteil wird gebildet von den Eigenfunktionen von $\tilde{H}_{in}$, die auch gleichzeitig Eigenfunktionen von L'_3 zur Quantenzahl K sind. In den Funktionen $\psi_{nk}^{(\omega)}$ ist die Projektion Ω des Gesamtdrehimpulses auf die z-Achse gleich der Projektion K von $L_3 = L'_3$ auf die innere Symmetrieachse. Weiterhin haben die $\psi_{nk}^{(\omega)}$ die gleiche Parität wie die χ_{nk} , da die Eulerschen Winkel eine gerade Funktion der Nukleonenkoordinaten bilden, die $\Phi_{n\pm, m}(\xi, \eta)$ auf Nukleonenkoordinaten transformiert also Zustände positiver Parität sind. Schließlich können wir den kollektiven Anteil $\Phi^{(\omega)}(\vec{r}_j)$ der ψ_{nk} numerisch einfach bestimmen.

Diese Überlegungen bleiben weiterhin richtig, wenn man in der Behandlung von $\tilde{T}_{in}$ aus (III.34) und $\tilde{V}_R$ aus (IV.21) besser als in der Näherung (IV.23) verfährt. Bei einer genaueren Übersetzung dieser Operatoren aufs Hilfssystem erhält man Terme, die Nilssonwellenfunktionen mit verschiedenem Ω mischen; diese Terme sind allerdings sehr klein gegenüber den bereits behandelten. Rechnet man in dieser verbesserten Näherung, so muß man in der Funktion (IV.28) kleine Komponenten $\Phi_{n\pm, m}$ mit $M \neq 0$ zulassen, da die Funktionen (IV.24) jetzt nicht mehr zu gutem Ω gehören. Man kann die Beimischungen störungstheoretisch leicht abschätzen. Auch hier zeigt sich, daß sie bei leichten deformierten Kernen von größerem Einfluß sein werden als bei schweren deformierten Kernen. Zur Bestimmung der zusätzlichen Koeffizienten $Q_{n\pm, m}$ muß man auf die Erwartungswerte weiterer kollektiver Operatoren zurückgreifen, weil man nicht mehr mit den drei Gleichungen (IV.40) bis (IV.42) auskommt. Als einfache Operatoren bieten sich z.B. die Phononenerhöhungs- und -erniedrigungsoperatoren des harmonischen Oszillators $H_{\pm}$ an.

IV.3. Rechnungen mit den projizierten Vielteilchenfunktionen

Wir haben in Teil IV.2. festgestellt, daß es gelingt, ein System von Funktionen $\psi_{nK}^{(u)}(\vec{r}_i)$ aus (IV.37) zu berechnen, das äquivalent dem System der inneren Eigenfunktionen $\chi_{nK}(\xi_i)$ ist. Da wir allerdings wissen, daß der Satz der Funktionen größer als der der χ_{nK} ist, ist das System der $\psi_{nK}^{(u)}$ noch redundant, d.h. es gibt unter den Funktionen $\psi_{nK}^{(u)}$ noch reine spuriose Zustände, welche die gleiche innere Funktion χ_{nK} enthalten und sich nur im kollektiven Anteil $\Phi^{(u)}(\vec{r}_i)$ unterscheiden. Diese spuriosen Funktionen sind leicht zu identifizieren und damit aus dem Satz der $\psi_{nK}^{(u)}$ zu entfernen. Zwei Funktionen $\psi_{nK}^{(u)}$ und $\psi_{nK}^{(u')}$, welche das gleiche χ_{nK} enthalten, müssen bezüglich $H_{in}(\vec{r}_i, \vec{p}_i)$ den gleichen Eigenwert liefern und mit H_ν aus (IV.25) ein von Null verschiedenes nichtdiagonales Matrixelement $\langle \psi_{nK}^{(u')} | H_\nu | \psi_{nK}^{(u)} \rangle$ besitzen, welches mit dem theoretisch berechenbaren $\langle \Phi^{(u')} | H_\nu | \Phi^{(u)} \rangle$ übereinstimmen muß. Die Rechnungen an den Vielteilchenzuständen der Seltenen Erden haben gezeigt, daß unter den niedrigen Anregungszuständen nur wenig spuriose auftreten. Zum Beispiel gibt es unter den 55 energieniedrigsten 0^+ -Zuständen von Yb^{168} nur drei spuriose Rotationszustände, welche mit den drei energiehöchsten bezüglich des Erwartungswertes von H_ν in der Fig. 4 übereinstimmen.

Wir können über die Vielteilchenfunktionen des Nilssonmodells die folgende Aussage machen:

Sie stellen eine gute Approximation an die Eigenfunktionen des inneren Hamiltonoperators $\tilde{H}_{in}$ dar. Durch Diagonalisierung von $\tilde{H}_{in}$ stellt man fest, daß nur wenige Nilssonfunktionen gemischt werden und immer eine wesentliche Komponente vorliegt. Diese Aussage gilt nicht immer für die Funktionen, welche sich nach Diagonalisierung als spurios erweisen. Mit Ausnahme der spuriosen Funktionen weichen die Erwartungswerte des Nilssonoperators maximal um 100 keV von denen von $\tilde{H}_{in}$ ab. Unter den Vielteilchenfunktionen

des Nilssonmodells im Niederenergiespektrum gibt es nur wenig spuriose. Die diagonalisierten Funktionen von H_{1n} weisen zum Teil recht unterschiedliche kollektive Anteile $\Phi^{(u)}(\vec{r}_j)$ auf.

Es stellt sich die Frage, ob man mit dieser so gewonnenen projizierten Basis weitere Rechnungen durchführen kann. Das ist in der Tat der Fall, da unsere Kenntnis der Funktionen $\Psi_{nK}^{(u)}(\vec{r}_j)$ vollständig ist. Diese Funktionen sind ein vollständiger Ersatz für die inneren Eigenfunktionen X_{nK} . Was man in weiteren Rechnungen benötigt, sind Matrixelemente innerer Operatoren $\tilde{O}(\xi_\nu, \eta_\nu)$ in den $X_{nK}(\xi_\nu)$. Man transformiert den Operator $\tilde{O}(\xi_\nu, \eta_\nu)$ aufs Hilfssystem nach dem geschilderten Verfahren und bildet dann die Matrixelemente in den Funktionen $\Psi_{nK}^{(u)}(\vec{r}_j)$. Da aber die Operatoren $\tilde{O}$ nur auf die X_{nK} einwirken, können die Matrixelemente im Hilfssystem durch die Überlappintegrale der $\Phi^{(u)}(\vec{r}_j)$ korrigiert werden, die wir kennen, da die Koeffizienten $\alpha_{n_1, n}^{(u)}$ der $\Phi_{n_1, n}$ bestimmt worden sind. Bei dieser Korrektur bleiben alle diagonalen Matrixelemente unverändert, die nichtdiagonalen Matrixelemente werden vergrößert, da die Überlappintegrale der $\Phi^{(u)}(\vec{r}_j)$ zwischen 0 und 1 liegen. Das zeigt uns, daß sich die größten Effekte des Projektionsverfahrens bei den Übergangswahrscheinlichkeiten zeigen werden, die wesentlich gegenüber den Übergangswahrscheinlichkeiten der unprojizierten Nilssonfunktionen verändert, und zwar vergrößert werden.

Zusammenfassung

Die Vielteilchenfunktionen der deformierten Schalenmodelle werden üblicherweise in der Kernphysik als Wellenfunktionen der inneren Bewegung des Nukleonensystems interpretiert und dementsprechend behandelt. Gegenüber einer inneren Funktion besitzen sie sechs überflüssige Freiheitsgrade, deren spuriose Anteile sich in ihnen bemerkbar machen. Diese spuriosen Bewegungen sind kollektiver Natur und entsprechen Schwerpunkts- und Rotationsoszillationen der Kerne, welche von den Rückstellpotentialen der deformierten Schalenmodelle bestimmt werden.

Das Ziel dieser Arbeit war es, bezüglich des Nilssonmodells zu untersuchen, ob seine Vielteilcheneigenfunktionen eine gute Approximation der inneren Funktionen darstellen, oder sie durch Korrekturen diesen anzunähern, was im weiter gefaßten Sinne als "Projektion" bezeichnet wurde.

Es stellte sich heraus, daß die spuriosen Anteile der Schwerpunktsoszillationen bei schweren deformierten Kernen im Niederenergiebereich vernachlässigbar klein sind. Dies ist eine Folge des harmonischen Potentialansatzes des Nilssonmodells und des geringen Einflusses des $\vec{L} \cdot \vec{s}$ und $\vec{L}^2$ -Terms bei schweren deformierten Kernen. Zustände bis Anregungsenergien von etwa $\hbar\omega_0$ können als frei von spuriosen Schwerpunktsanteilen angesehen werden.

Bezüglich der spuriosen Rotationsoszillationen wurde das von Scheid vorgeschlagene Projektionsverfahren auf seine Anwendbarkeit geprüft. Diese Methode ist zunächst nur für nichtaxialsymmetrische Potentiale verwendbar; sie wurde daher so umgearbeitet, daß die Rotationssymmetrie der axialsymmetrischen Potentiale berücksichtigt werden kann. Die kinetische Energie und das deformierte Potential wurden vom Laborsystem auf ein inneres System des Kerns transformiert, wobei die Axialsymmetrie des Potentials und die geringe Abweichung von Laborsystem und innerem System aufgrund der kleinen Rotationsschwankungen beachtet wurden. Das Stu-

dium der sich so ergebenden Terme des transformierten Hamiltonoperators brachte die Erkenntnis, daß es numerisch unpraktikabel sei, das Scheid'sche Projektionsverfahren durchzuführen.

Es wurde darauf verzichtet, die Vielteilchenfunktionen des Nilssonmodells so zu korrigieren, daß sie alle den gleichen spuriosen Rotationsanteil enthalten. Dafür wurde ein Verfahren entworfen, welches es gestattet, einen nicht redundanten Satz von Eigenfunktionen zu einem inneren Hamiltonoperator und zur Komponente L_3 des Gesamtdrehimpulses zu konstruieren. Diese Funktionen enthalten in abseparierter Form einen kollektiven Rotationsanteil, der durch ein einfaches numerisches Verfahren bestimmt werden kann. Rechnungen mithilfe dieses Modells wurden an den geraden-geraden Ytterbiumisotopen durchgeführt.

Es zeigte sich, daß die Eigenwerte des Nilssonmodells nur wenig (≈ 100 keV) von denen des rein inneren Hamiltonoperators abweichen und daß auch die Eigenfunktionen des Nilssonmodells eine gute Approximation der inneren darstellen. Allerdings enthalten sie z.T. recht verschiedene kollektive Rotationsanteile. Rechnungen mit dem korrigierten Funktionssatz werden daher zu veränderten Spektren (Änderung der Bandenköpfe und Trägheitsmomente) und vor allem zu veränderten Übergangswahrscheinlichkeiten, und zwar größeren, führen.

Anhang A

Der Schalenmodelloperator

Der Hamiltonoperator des Schalenmodells wird wie bei Nilsson^{32), 33)} et.al. gewählt:

$$H_{sp} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta' + \frac{m}{2} (\omega_x^2 x'^2 + \omega_y^2 y'^2 + \omega_z^2 z'^2) + C \vec{L} \cdot \vec{S} + D (\vec{L}^2 + \langle \vec{L}^2 \rangle_N) \quad (A1)$$

Abweichend vom Nilssonansatz wird ein Deformationsparameter durch folgende Festlegung eingeführt³⁴⁾:

$$\omega_x = \omega_y = \omega_0 \cdot e^{\epsilon/3} \quad \omega_z = \omega_0 \cdot e^{-2\epsilon/3} \quad (A2)$$

Dieser Ansatz erfüllt die Bedingung, daß sich bei Deformationen des Kerns das von einer Äquipotentialfläche eingeschlossene Volumen nicht ändert:

$$\omega_x \cdot \omega_y \cdot \omega_z = \omega_0^3 \quad (A3)$$

ω_0 ist nicht deformationsabhängig. ϵ stimmt für kleine Deformationen gut mit dem von Nilsson gewählten δ überein.

Die Äquipotentialflächen sind Ellipsoidflächen. Am Kernrand haben wir die Gestalt:

$$(x'^2 + y'^2) e^{2\epsilon/3} + z'^2 e^{-4\epsilon/3} = R_0^2 \quad (A4)$$

Nach Einführung der dimensionslosen Koordinaten

$$x' = \left(\frac{\hbar}{m\omega_x} \right)^{1/2} x = \left(\frac{\hbar}{m\omega_x} \right)^{1/2} \rho \cos \varphi; \quad y' = \left(\frac{\hbar}{m\omega_y} \right)^{1/2} y = \left(\frac{\hbar}{m\omega_y} \right)^{1/2} \rho \sin \varphi \quad (A5)$$

$$z' = \left(\frac{\hbar}{m\omega_z} \right)^{1/2} z$$

nimmt der Hamiltonoperator folgende Form an:

$$H_{sp} = \frac{1}{2} \hbar \omega_x \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \rho^2 \right\} + \frac{1}{2} \hbar \omega_z \left(-\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + z'^2 \right) + C \vec{L} \cdot \vec{S} + D (\vec{L}^2 - \langle \vec{L}^2 \rangle_N) \quad (A6)$$

Der Operator $\vec{L}'$ im Raum der (x', y', z') wurde durch den analogen Operator $\vec{L}$ im Raum der (x, y, z) ersetzt. Diese Näherung, welche die Mischung der N-Schalen durch den $\vec{L}'^2$ - und $\vec{L}' \cdot \vec{S}$ - Operator aufhebt, wird ausführlich bei Nilsson³²⁾ diskutiert.

Der Hamiltonoperator (A6) wird in folgendem Basissystem diagonalisiert:

$$\psi_{N, n_z, M, \varepsilon} = \phi_{n, M}(\varrho, \varphi) \cdot Z_{n_z}(z) \cdot \chi_z$$

$$\phi_{n, M} = (-1)^{\frac{1}{2}(M+|M|)} \left\{ \frac{2 \cdot n!}{[(n+|M|)!]^3} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\varrho^2/2} \varrho^{|M|} L_n^{|M|}(\varrho^2) \frac{e^{iM\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad (A7)$$

$$Z_{n_z} = \left\{ \sqrt{\pi} \cdot 2^{n_z} \cdot n_z! \right\}^{-\frac{1}{2}} e^{-z^2/2} H_{n_z}(z)$$

χ_z sind die Spineigenfunktionen, $L_n^{|M|}$ verallgemeinerte Laguerresche und H_{n_z} Hermite'sche Polynome. Zwischen den Quantenzahlen bestehen die Relationen:

$$N = n_z + n_{\perp} \quad n_{\perp} = 2n + |M| \quad (A8)$$

Die Funktionen $\phi_{n, M}$ wurden mit dem Phasenfaktor $(-1)^{1/2(M+|M|)}$ versehen, damit sie sich in der Relation $\phi_{n, M}^* = (-1)^M \phi_{n, -M}$ wie die Kugelfunktionen $Y_{l, M}$ in der üblichen Phasenkonvention verhalten.

Die Funktionen (A7) sind Eigenfunktionen des anisotropen harmonischen Oszillators in Zylinderkoordinaten, der im Hamiltonoperator (A6) auftritt, zu den Eigenwerten

$$E = \hbar \omega_0 e^{\varepsilon/3} (n_{\perp} + 1) + \hbar \omega_0 e^{-2\varepsilon/3} (n_z + \frac{1}{2}) \quad (A9)$$

Matrixelemente verschiedener Operatoren in diesen Eigenfunktionen werden im Anhang B angegeben.

Anhang B

Matrixelemente verschiedener Operatoren in den Eigenfunktionen (A7) des anisotropen harmonischen Oszillators in Zylinderfunktionen

Bei der Umrechnung von Operatoren vom Raum der (x', y', z') zu dem der (x, y, z) tritt die Konstante

$$\gamma = \left(\frac{\omega_z}{\omega_r} \right)^{1/2} = e^{-\epsilon/2} \quad (\text{B1})$$

auf. Als Abkürzung wird benutzt

$$\Gamma_{\pm} = (\gamma^{\pm 1} \pm \gamma) \quad (\text{B2})$$

Matrixelemente des Drehimpulsoperators

$$l'_{\pm} = l'_x \pm i l'_y$$

$$\begin{aligned} \langle N, n_z - 1, M \pm 1 | l'_z | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{2} \Gamma_{\pm} \{ n_z (n_z \pm M + 2) \}^{1/2} \\ \langle N, n_z + 1, M \pm 1 | l'_z | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{2} \Gamma_{\pm} \{ (n_z + 1) (n_z \mp M) \}^{1/2} \\ \langle N - 2, n_z - 1, M \pm 1 | l'_z | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{2} \Gamma_{\pm} \{ n_z (n_z \mp M) \}^{1/2} \\ \langle N + 2, n_z + 1, M \pm 1 | l'_z | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{2} \Gamma_{\pm} \{ (n_z + 1) (n_z \pm M + 2) \}^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

Die Matrixelemente des $\vec{l}' \cdot \vec{s}$ -Terms ergeben sich aus den Matrixelementen von l'_z durch

$$\vec{l}' \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} (l'_+ s_- + l'_- s_+) + l'_z s_z \quad (\text{B4})$$

$$\begin{aligned} \langle N, n_z, M | \vec{l}'^2 | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{2} (\gamma^{-2} + \gamma^2) (2n_z + 1) (n_z + 1) + M^2 - 1 \\ \langle N, n_z - 2, M | \vec{l}'^2 | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{4} \Gamma_+^2 \{ n_z (n_z - 1) (n_z + M + 2) (n_z - M + 2) \}^{1/2} \\ \langle N, n_z + 2, M | \vec{l}'^2 | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{4} \Gamma_-^2 \{ (n_z + 1) (n_z + 2) (n_z + M) (n_z - M) \}^{1/2} \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

$$\begin{aligned}
 \langle N-2, n_z, M | \tilde{L}^{12} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{4} T_+ T_- (2n_z+1) \{ (n_1+M)(n_1-M) \}^{1/2} \\
 \langle N-2, n_z-2, M | \tilde{L}^{12} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{2} T_+ T_- (n_1+1) \{ n_z (n_z-1) \}^{1/2} \\
 \langle N+2, n_z, M | \tilde{L}^{12} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{4} T_+ T_- (2n_z+1) \{ (n_1+M+2)(n_1-M+2) \}^{1/2} \\
 \langle N+2, n_z+2, M | \tilde{L}^{12} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{2} T_+ T_- (n_1+1) \{ (n_z+1)(n_z+2) \}^{1/2} \\
 \langle N-4, n_z-2, M | \tilde{L}^{12} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{4} T_-^2 \{ n_z (n_z-1) (n_1+M)(n_1-M) \}^{1/2} \\
 \langle N+4, n_z+2, M | \tilde{L}^{12} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{4} T_-^2 \{ (n_z+1)(n_z+2)(n_1+M+2)(n_1-M+2) \}^{1/2}
 \end{aligned} \tag{B5}$$

Die Matrixelemente der analogen Operatoren l_+ , $\vec{l} \cdot \vec{s}$ und $\vec{l}^2$ im Raum der (x, y, z) erhält man aus denen im Raum der (x', y', z') , indem man $\gamma = 1$ setzt. Wie man sieht, verschwindet dann die N-Schalenmischung (Anhang A).

Matrixelemente des Natafoperators

$$N_{\pm}^i = N_x^i \pm i N_y^i$$

$$\begin{aligned}
 \langle N, n_z-1, M \mp 1 | N_{\pm}^i | N, n_z, M \rangle &= -\frac{1}{2} T_{\pm} \{ n_z (n_1 \mp M + 2) \}^{1/2} \\
 \langle N, n_z+1, M \mp 1 | N_{\pm}^i | N, n_z, M \rangle &= -\frac{1}{2} T_{\pm} \{ (n_z+1)(n_1 \pm M) \}^{1/2} \\
 \langle N-2, n_z-1, M \mp 1 | N_{\pm}^i | N, n_z, M \rangle &= -\frac{1}{2} T_{\pm} \{ n_z (n_1 \pm M) \}^{1/2} \\
 \langle N+2, n_z+1, M \mp 1 | N_{\pm}^i | N, n_z, M \rangle &= -\frac{1}{2} T_{\pm} \{ (n_z+1)(n_1 \mp M + 2) \}^{1/2}
 \end{aligned} \tag{B6}$$

$$\begin{aligned}
 \langle N, n_z, M | N_x^{i2} + N_y^{i2} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{2} (\gamma^2 + \gamma'^2) (2n_z+1) (n_1+1) + 1 \\
 \langle N, n_z-2, M | N_x^{i2} + N_y^{i2} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{4} T_-^2 \{ n_z (n_z-1) (n_1+M+2)(n_1-M+2) \}^{1/2} \\
 \langle N, n_z+2, M | N_x^{i2} + N_y^{i2} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{4} T_-^2 \{ (n_z+1)(n_z+2)(n_1+M)(n_1-M) \}^{1/2} \\
 \langle N-2, n_z, M | N_x^{i2} + N_y^{i2} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{4} T_+ T_- (2n_z+1) \{ (n_1+M)(n_1-M) \}^{1/2} \\
 \langle N-2, n_z-2, M | N_x^{i2} + N_y^{i2} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{2} T_+ T_- (n_1+1) \{ n_z (n_z-1) \}^{1/2} \\
 \langle N+2, n_z, M | N_x^{i2} + N_y^{i2} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{4} T_+ T_- (2n_z+1) \{ (n_1+M+2)(n_1-M+2) \}^{1/2} \\
 \langle N+2, n_z+2, M | N_x^{i2} + N_y^{i2} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{2} T_+ T_- (n_1+1) \{ (n_z+1)(n_z+2) \}^{1/2}
 \end{aligned} \tag{B7}$$

$$\begin{aligned} \langle N-4, n_z-2, M | N_x^{12} + N_y^{12} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{4} T_+^2 \{ n_z(n_z-1)(n_1+M)(n_1-M) \}^{1/2} \\ \langle N+4, n_z+2, M | N_x^{12} + N_y^{12} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{4} T_+^2 \{ (n_z+1)(n_z+2)(n_1+M+2)(n_1-M+2) \}^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle N-2, n_z, M-2 | N_z^1 | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{4} \{ (n_1+M)(n_1+M-2) \}^{1/2} \\ \langle N-2, n_z, M+2 | N_z^1 | N, n_z, M \rangle &= -\frac{1}{4} \{ (n_1-M)(n_1-M-2) \}^{1/2} \\ \langle N+2, n_z, M-2 | N_z^1 | N, n_z, M \rangle &= -\frac{1}{4} \{ (n_1-M+2)(n_1-M+4) \}^{1/2} \\ \langle N+2, n_z, M+2 | N_z^1 | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{4} \{ (n_1+M+2)(n_1+M+4) \}^{1/2} \end{aligned} \quad (B8)$$

$$\begin{aligned} \langle N, n_z, M | N_z^{12} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{4} (n_1^2 + M^2) + \frac{1}{2} n_1 + 1 \\ \langle N, n_z, M \mp 4 | N_z^{12} | N, n_z, M \rangle &= -\frac{1}{8} \{ (n_1 \pm M)(n_1 \pm M-2)(n_1 \mp M+2)(n_1 \mp M+4) \}^{1/2} \\ \langle N-4, n_z, M | N_z^{12} | N, n_z, M \rangle &= -\frac{1}{8} \{ (n_1+M)(n_1+M-2)(n_1-M)(n_1-M-2) \}^{1/2} \\ \langle N-4, n_z, M \mp 4 | N_z^{12} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{16} \{ (n_1 \pm M)(n_1 \pm M-2)(n_1 \pm M+4)(n_1 \pm M-6) \}^{1/2} \\ \langle N+4, n_z, M | N_z^{12} | N, n_z, M \rangle &= -\frac{1}{8} \{ (n_1+M+2)(n_1+M+4)(n_1-M+2)(n_1-M+4) \}^{1/2} \\ \langle N+4, n_z, M \mp 4 | N_z^{12} | N, n_z, M \rangle &= \frac{1}{16} \{ (n_1 \mp M+2)(n_1 \mp M+4)(n_1 \mp M+6)(n_1 \mp M+8) \}^{1/2} \end{aligned} \quad (B9)$$

Matrixelemente zur Berechnung der Trägheits- und Deviationsmomente

Für die Berechnung der Trägheits- und Deviationsmomente werden folgende Operatoren benötigt:

$$\begin{aligned} I_x &= \sum_i x_i^2 & I_y &= \sum_i y_i^2 & I_z &= \sum_i z_i^2 \\ I_x^2 &= \sum_i x_i^4 + 2 \sum_{i \neq k} x_i^2 x_k^2 & I_y^2 &= \sum_i y_i^4 + 2 \sum_{i \neq k} y_i^2 y_k^2 & I_z^2 &= \sum_i z_i^4 + 2 \sum_{i \neq k} z_i^2 z_k^2 \\ I_x I_y &= \sum_i x_i^2 y_i^2 + \sum_{i \neq k} (x_i^2 y_k^2 + y_i^2 x_k^2) & I_x I_z &= \sum_i x_i^2 z_i^2 + \sum_{i \neq k} (x_i^2 z_k^2 + z_i^2 x_k^2) \\ I_y I_z &= \sum_i y_i^2 z_i^2 + \sum_{i \neq k} (y_i^2 z_k^2 + z_i^2 y_k^2) \\ I_{xy} &= \sum_i x_i y_i & I_{xz} &= \sum_i x_i z_i & I_{yz} &= \sum_i y_i z_i \\ I_{xy}^2 &= \sum_i x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{i \neq k} x_i y_i x_k y_k & I_{xz}^2 &= \sum_i x_i^2 z_i^2 + 2 \sum_{i \neq k} x_i z_i x_k z_k \\ I_{yz}^2 &= \sum_i y_i^2 z_i^2 + 2 \sum_{i \neq k} y_i z_i y_k z_k \end{aligned} \quad (B10)$$

Nun ist:

$$x = \frac{1}{2} \vartheta (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \quad y = \frac{1}{2i} \vartheta (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \vartheta^2 \pm \frac{1}{4} \vartheta^2 (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}) \quad xy = \frac{1}{4i} \vartheta^2 (e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi})$$

(B11)

$$x^4 = \frac{3}{8} \vartheta^4 + \frac{1}{16} \vartheta^4 (e^{4i\varphi} + e^{-4i\varphi}) \pm \frac{1}{4} \vartheta^4 (e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi})$$

$$x^2 y^2 = \frac{1}{8} \vartheta^4 - \frac{1}{16} \vartheta^4 (e^{4i\varphi} + e^{-4i\varphi})$$

Daher genügt es, die Matrixelemente folgender Operatoren zu kennen:

$$\langle N, n_z, H | z^2 | N, n_z, H \rangle = \frac{1}{2} (2n_z + 1)$$

$$\langle N-2, n_z-2, H | z^2 | N, n_z, H \rangle = \frac{1}{2} \{ n_z (n_z - 1) \}^{1/2}$$

(B12)

$$\langle N+2, n_z+2, H | z^2 | N, n_z, H \rangle = \frac{1}{2} \{ (n_z + 1)(n_z + 2) \}^{1/2}$$

$$\langle N, n_z, H | z^4 | N, n_z, H \rangle = \frac{3}{4} (2n_z^2 + 2n_z + 1)$$

$$\langle N-2, n_z-2, H | z^4 | N, n_z, H \rangle = \frac{1}{2} (2n_z - 1) \{ n_z (n_z - 1) \}^{1/2}$$

$$\langle N+2, n_z+2, H | z^4 | N, n_z, H \rangle = \frac{1}{2} (2n_z + 3) \{ (n_z + 1)(n_z + 2) \}^{1/2}$$

(B13)

$$\langle N-4, n_z-4, H | z^4 | N, n_z, H \rangle = \frac{1}{4} \{ n_z (n_z - 1)(n_z - 2)(n_z - 3) \}^{1/2}$$

$$\langle N+4, n_z+4, H | z^4 | N, n_z, H \rangle = \frac{1}{4} \{ (n_z + 1)(n_z + 2)(n_z + 3)(n_z + 4) \}^{1/2}$$

$$\langle N, n_z, H | \vartheta^2 | N, n_z, H \rangle = n_z + 1$$

$$\langle N-2, n_z, H | \vartheta^2 | N, n_z, H \rangle = -\frac{1}{2} \{ (n_z + 1)(n_z - 1) \}^{1/2}$$

(B14)

$$\langle N+2, n_z, H | \vartheta^2 | N, n_z, H \rangle = -\frac{1}{2} \{ (n_z + 1 + 2)(n_z - 1 + 2) \}^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
 \langle N, n_z, H | g^4 | N, n_z, H \rangle &= \frac{3}{2} (n_z + H)(n_z - H) + 3n_z + H^2 + 2 \\
 \langle N-2, n_z, H | g^4 | N, n_z, H \rangle &= -n_z \{ (n_z + H)(n_z - H) \}^{1/2} \\
 \langle N+2, n_z, H | g^4 | N, n_z, H \rangle &= -(n_z + 2) \{ (n_z + H + 2)(n_z - H + 2) \}^{1/2} \\
 \langle N-4, n_z, H | g^4 | N, n_z, H \rangle &= \frac{1}{4} \{ (n_z + H)(n_z - H)(n_z + H - 2)(n_z - H - 2) \}^{1/2} \\
 \langle N+4, n_z, H | g^4 | N, n_z, H \rangle &= \frac{1}{4} \{ (n_z + H + 2)(n_z - H + 2)(n_z + H + 4)(n_z - H + 4) \}^{1/2}
 \end{aligned} \tag{B15}$$

$$\begin{aligned}
 \langle N-1, n_z, H \pm 1 | g e^{\pm i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= \pm \frac{1}{2} \{ 2(n_z \mp H) \}^{1/2} \\
 \langle N+1, n_z, H \pm 1 | g e^{\pm i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= \mp \frac{1}{2} \{ 2(n_z \pm H + 2) \}^{1/2}
 \end{aligned} \tag{B16}$$

$$\begin{aligned}
 \langle N, n_z - 1, H \pm 1 | z g e^{\pm i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= \mp \frac{1}{2} \{ n_z (n_z \pm H + 2) \}^{1/2} \\
 \langle N, n_z + 1, H \pm 1 | z g e^{\pm i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= \pm \frac{1}{2} \{ (n_z + 1)(n_z \mp H) \}^{1/2} \\
 \langle N-2, n_z - 1, H \pm 1 | z g e^{\pm i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= \pm \frac{1}{2} \{ n_z (n_z \mp H) \}^{1/2} \\
 \langle N+2, n_z + 1, H \pm 1 | z g e^{\pm i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= \mp \frac{1}{2} \{ (n_z + 1)(n_z \pm H + 2) \}^{1/2}
 \end{aligned} \tag{B17}$$

$$\begin{aligned}
 \langle N, n_z, H \pm 2 | g^2 e^{\pm 2i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= - \{ (n_z \mp H)(n_z \pm H + 2) \}^{1/2} \\
 \langle N-2, n_z, H \pm 2 | g^2 e^{\pm 2i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= \frac{1}{2} \{ (n_z \mp H)(n_z \mp H - 2) \}^{1/2} \\
 \langle N+2, n_z, H \pm 2 | g^2 e^{\pm 2i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= \frac{1}{2} \{ (n_z \pm H + 2)(n_z \pm H + 4) \}^{1/2}
 \end{aligned} \tag{B18}$$

$$\begin{aligned}
 \langle N, n_z, H \pm 4 | g^4 e^{\pm 4i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= \frac{3}{2} \{ (n_z \pm H + 2)(n_z \pm H + 4)(n_z \mp H)(n_z \mp H - 2) \}^{1/2} \\
 \langle N-2, n_z, H \pm 4 | g^4 e^{\pm 4i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= - \{ (n_z \pm H + 2)(n_z \mp H)(n_z \mp H - 2)(n_z \mp H - 4) \}^{1/2} \\
 \langle N+2, n_z, H \pm 4 | g^4 e^{\pm 4i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= - \{ (n_z \pm H + 2)(n_z \pm H + 4)(n_z \pm H + 6)(n_z \mp H) \}^{1/2} \\
 \langle N-4, n_z, H \pm 4 | g^4 e^{\pm 4i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= \frac{1}{4} \{ (n_z \mp H)(n_z \mp H - 2)(n_z \mp H - 4)(n_z \mp H - 6) \}^{1/2} \\
 \langle N+4, n_z, H \pm 4 | g^4 e^{\pm 4i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= \frac{1}{4} \{ (n_z \pm H + 2)(n_z \pm H + 4)(n_z \pm H + 6)(n_z \pm H + 8) \}^{1/2}
 \end{aligned} \tag{B19}$$

$$\begin{aligned}
 \langle N, n_z, H \pm 2 | g^4 e^{\pm 2i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= -\frac{3}{2} (n_z + 1) \{ (n_z \pm H + 2)(n_z \mp H) \}^{1/2} \\
 \langle N-2, n_z, H \pm 2 | g^4 e^{\pm 2i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= \frac{1}{2} (2n_z \pm H + 1) \{ (n_z \mp H)(n_z \mp H - 2) \}^{1/2} \\
 \langle N+2, n_z, H \pm 2 | g^4 e^{\pm 2i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= \frac{1}{2} (2n_z \mp H + 3) \{ (n_z \pm H + 2)(n_z \pm H + 4) \}^{1/2} \quad (B20) \\
 \langle N-4, n_z, H \pm 2 | g^4 e^{\pm 2i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= -\frac{1}{4} \{ (n_z \pm H)(n_z \mp H)(n_z \mp H - 2)(n_z \mp H - 4) \}^{1/2} \\
 \langle N+4, n_z, H \pm 2 | g^4 e^{\pm 2i\varphi} | N, n_z, H \rangle &= -\frac{1}{4} \{ (n_z \pm H + 2)(n_z \pm H + 4)(n_z \pm H + 6)(n_z \mp H + 2) \}^{1/2}
 \end{aligned}$$

Anhang C

Definition der Eulerschen Winkel

Die zwei Eulerschen Winkel ($\mathcal{J}_x$, $\mathcal{J}_y$) werden folgendermaßen festgelegt:

1. Drehung um die x-Achse des Hilfssystems um $\mathcal{J}_x$
2. Drehung um die neue y-Achse um $\mathcal{J}_y$

Die Transformation (II.1) nimmt dann folgende spezielle Gestalt an, aus der man die $R_{A\alpha}(\mathcal{J}_j)$ entnehmen kann:

$$\begin{aligned} x' &= \cos \mathcal{J}_y (x - X) + \sin \mathcal{J}_x \sin \mathcal{J}_y (y - Y) - \cos \mathcal{J}_x \sin \mathcal{J}_y (z - Z) \\ y' &= \cos \mathcal{J}_x (y - Y) + \sin \mathcal{J}_x (z - Z) \\ z' &= \sin \mathcal{J}_y (x - X) - \sin \mathcal{J}_x \cos \mathcal{J}_y (y - Y) + \cos \mathcal{J}_x \cos \mathcal{J}_y (z - Z) \end{aligned} \quad (C1)$$

Berechnung der Matrizen $M_{i\alpha, C}$

Es gilt (siehe (III.8)) $M_{i\alpha, C} = \sum_j \frac{\partial R_{A\alpha}}{\partial x_{i\alpha}} R_{Bj}$.
Da nun

$$\frac{\partial R_{A\alpha}}{\partial x_{i\alpha}} = \sum_j \frac{\partial R_{A\alpha}}{\partial \mathcal{J}_j} \frac{\partial \mathcal{J}_j}{\partial x_{i\alpha}} \quad \text{ergibt sich sofort aus (C1)}$$

$$M_{i\alpha, 1} = \cos \mathcal{J}_y \frac{\partial \mathcal{J}_x}{\partial x_{i\alpha}} \quad M_{i\alpha, 2} = \frac{\partial \mathcal{J}_y}{\partial x_{i\alpha}} \quad M_{i\alpha, 3} = \sin \mathcal{J}_y \frac{\partial \mathcal{J}_x}{\partial x_{i\alpha}} \quad (C2)$$

und damit

$$M_{i\alpha, 3} = \tan \mathcal{J}_y M_{i\alpha, 1} \quad (C3)$$

Beziehungen von der Form $\sum_{i,\alpha} P_{i\alpha,c} M_{i\alpha,d}$ und $\sum_{i,\alpha} O_{i\alpha,c} M_{i\alpha,d}$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,\alpha} P_{i\alpha,1} M_{i\alpha,1} &= \bar{G}^{-1} G_{23} & \sum_{i,\alpha} P_{i\alpha,1} M_{i\alpha,2} &= -2 \bar{G}^{-1} I_3 I_{12} \\
 \sum_{i,\alpha} P_{i\alpha,2} M_{i\alpha,1} &= 2 \bar{G}^{-1} I_3 I_{12} & \sum_{i,\alpha} P_{i\alpha,2} M_{i\alpha,2} &= \bar{G}^{-1} G_{13} \\
 \sum_{i,\alpha} P_{i\alpha,3} M_{i\alpha,1} &= 0 & \sum_{i,\alpha} P_{i\alpha,3} M_{i\alpha,2} &= 0
 \end{aligned} \tag{C4}$$

$$G = (I_3 - I_1)(I_2 - I_3) + I_{12}^2; \quad G_{13} = (I_3 + I_1)(I_2 - I_3) - I_{12}^2; \quad G_{23} = (I_3 - I_1)(I_2 + I_3) + I_{12}^2$$

$$\sum_{i,\alpha} O_{i\alpha,c} M_{i\alpha,d} = \delta_{cd} \quad c, d = 1, 2 \quad \sum_{i,\alpha} O_{i\alpha,3} M_{i\alpha,d} = 0 \tag{C5}$$

Beziehungen, in denen $M_{i\alpha, 3}$ auftritt, lassen sich über (C.3) auf die mit $M_{i\alpha, 1}$ zurückführen.

Wirkung der Drehimpulskomponenten auf die $R_{A\alpha}(\mathcal{J}_j)$

Mit Hilfe der Beziehung (III.20) läßt sich die Wirkung der Drehimpulskomponenten auf die $R_{A\alpha}(\mathcal{J}_j)$ sofort berechnen, wenn man beachtet, daß L'_3 nicht auf die Eulerschen Winkel einwirkt. Ohne den Faktor $\frac{1}{2}$ ergibt sich:

$$L_1 R_{1\gamma} = \tan \mathcal{J}_\gamma R_{2\gamma} \quad L_1 R_{2\gamma} = -\tan \mathcal{J}_\gamma R_{1\gamma} + R_{2\gamma} \quad L_1 R_{3\gamma} = -R_{2\gamma} \tag{C6}$$

$$L_2 R_{1\gamma} = -R_{3\gamma} \quad L_2 R_{2\gamma} = 0 \quad L_2 R_{3\gamma} = R_{1\gamma}$$

$$L_3 R_{c\gamma} = 0 \quad c = 1, 2, 3$$

$$\gamma = x, y, z$$

Wirkung der Drehimpulskomponenten auf $I_A (x_i')$, $I_{12} (x_i')$

Es läßt sich leicht folgende Rechnung durchführen:

$$\begin{aligned} L_C x_{j3}' &= \sum_{i,\mu} O_{i\mu,c} p_{i\mu} x_{j3}' = \sum_{i,\mu} O_{i\mu,c} p_{i\mu} \left\{ \sum_y R_{y3} (x_{jy} - x_y) \right\} \\ &= x_{jA}' \delta_{33} - x_{j3}' \delta_{A3} + \sum_k x_{jk}' \sum_{i,\mu} O_{i\mu,c} M_{i\mu,3k} \end{aligned} \quad (C7)$$

Daraus erhält man:

$$\begin{aligned} L_C I_D &= 2 (I_{AD} \delta_{33} - I_{3D} \delta_{AD}) + 2 \sum_k I_{k3} \sum_{i,\mu} O_{i\mu,c} M_{i\mu,3k} \\ L_C I_{A2} &= I_{A1} \delta_{32} + I_{A2} \delta_{31} - I_{B1} \delta_{A2} - I_{B2} \delta_{A1} \\ &\quad + \sum_k I_{k1} \sum_{i,\mu} O_{i\mu,c} M_{i\mu,2k} + \sum_k I_{k2} \sum_{i,\mu} O_{i\mu,c} M_{i\mu,1k} \end{aligned} \quad (C8)$$

wobei I_{AD} für $A = D$ die Größe I_A , für $A \neq D$ das Deviationsmoment I_{AD} bezeichnen soll. Wir wenden (C8) für die Komponente L_3 und dann mit (III.20) für L_1 und L_2 an und beachten, daß die $\tilde{u}_j$ nicht auf die inneren Koordinaten einwirken:

$$\begin{aligned} L_1 I_1 &= 2 \tan \vartheta_y I_{12} & L_1 I_2 &= -2 \tan \vartheta_y I_{12} & L_1 I_3 &= 0 \\ L_1 I_{12} &= \tan \vartheta_y (I_2 - I_1) \\ L_2 I_A &= 0 \quad A = 1, 2, 3 & L_2 I_{12} &= 0 \end{aligned} \quad (C9)$$

$$L_3 I_1 = -2 I_{12} \quad L_3 I_2 = 2 I_{12} \quad L_3 I_3 = 0 \quad L_3 I_{12} = I_1 - I_2$$

Wirkung der Komponenten des inneren Drehimpulses auf I_A und I_{12}

Äquivalent zur Aussage (C8) erhält man:

$$\begin{aligned} N_C I_D &= 2 (I_{AD} \delta_{33} + I_{3D} \delta_{AD}) + 2 \sum_k I_{k3} \sum_{i,\mu} P_{i\mu,c} M_{i\mu,3k} \\ N_C I_{A2} &= I_{A1} \delta_{32} + I_{A2} \delta_{31} + I_{B1} \delta_{A2} + I_{B2} \delta_{A1} \\ &\quad + \sum_k I_{k1} \sum_{i,\mu} P_{i\mu,c} M_{i\mu,2k} + \sum_k I_{k2} \sum_{i,\mu} P_{i\mu,c} M_{i\mu,1k} \end{aligned} \quad (C10)$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 N_1 I_1 &= 2 \tan \delta_y \bar{G}^{-1} G_{23} I_{12} & N_1 I_2 &= -2 \tan \delta_y \bar{G}^{-1} G_{23} I_{12} \\
 N_1 I_3 &= 0 & N_1 I_{12} &= \tan \delta_y \bar{G}^{-1} G_{23} (I_2 - I_1) \\
 N_2 I_1 &= 4 \tan \delta_y \bar{G}^{-1} I_3 I_{12}^2 & N_2 I_2 &= -4 \tan \delta_y \bar{G}^{-1} I_3 I_{12}^2 \\
 N_2 I_3 &= 0 & N_2 I_{12} &= 2 \tan \delta_y \bar{G}^{-1} I_3 (I_2 - I_1) I_{12}
 \end{aligned} \tag{C11}$$

Aus (C11) läßt sich über (III.26) die Wirkung von $(L_1 - L'_1)$ und $(L_2 - L'_2)$ berechnen:

$$\begin{aligned}
 (L_1 - L'_1) I_1 &= 2 \tan \delta_y I_{12} & (L_1 - L'_1) I_2 &= -2 \tan \delta_y I_{12} \\
 (L_1 - L'_1) I_3 &= 0 & (L_1 - L'_1) I_{12} &= \tan \delta_y (I_2 - I_1) \\
 (L_2 - L'_2) I_A &= 0 \quad A = 1, 2, 3 & (L_2 - L'_2) I_{12} &= 0
 \end{aligned} \tag{C12}$$

Aus (C12) und (C9) ergibt sich schließlich:

$$L'_c I_D = 0 \quad C = 1, 2; \quad D = 1, 2, 3 \quad L'_c I_{12} = 0 \tag{C13}$$

Die Wirkungsweise von L'_3 kann man wegen $L'_3 = L_3$ aus (C9) entnehmen.

Man macht sich weiterhin leicht folgende Beziehungen klar:

$$\begin{aligned}
 (L_c - L'_c) G &= 0 & C &= 1, 2, 3 \\
 (L_1 - L'_1) G_{13} &= (L_1 - L'_1) G_{23} & &= -4 \tan \delta_y I_3 I_{12}
 \end{aligned} \tag{C14}$$

$$(L_2 - L'_2) G_{13} = (L_2 - L'_2) G_{23} = 0$$

$$(L_c - L'_c) G_0 = 0 \quad C = 1, 2, 3$$

Wirkung des inneren Drehimpulses auf die x'_{iA}

$$L'_1 x'_{i1} = -2 I_{12} I_3 G_0^{-1} G x'_{i3}$$

$$L'_1 x'_{i2} = - (G_0^{-1} G G_{13} + 1) x'_{i3}$$

$$L'_1 x'_{i3} = - (G_0^{-1} G G_{13} - 1) x'_{i2} - 2 I_{12} I_3 G_0^{-1} G x'_{i1}$$

$$L'_2 x'_{i1} = - (G_0^{-1} G G_{23} - 1) x'_{i3}$$

(C15)

$$L'_2 x'_{i2} = 2 I_{12} I_3 G_0^{-1} G x'_{i3}$$

$$L'_2 x'_{i3} = - (G_0^{-1} G G_{23} + 1) x'_{i1} + 2 I_{12} I_3 G_0^{-1} G x'_{i2}$$

$$L'_3 x'_{i1} = - x'_{i2}$$

$$L'_3 x'_{i3} = 0$$

$$L'_3 x'_{i2} = x'_{i1}$$

Alle Formeln wurden ohne den Faktor $\hbar/4$ angegeben.

Anhang D

Berechnung der kinetischen Energie

Unter Verwendung von (III.3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{i,\alpha} p_{i\alpha}^2 &= \frac{1}{A} \sum_{\alpha} P_{\alpha}^2 + \sum_c \left(\sum_{i,\alpha} p_{i\alpha} R_{c\alpha} \right) p'_{ic} + \sum_c R_{c\alpha} \sum_{i,\alpha} p_{i\alpha} p'_{ic} + \\ &+ \sum_c \left(\sum_{i,\alpha} p_{i\alpha} M_{i\alpha,c} \right) (L_c - L'_c) + \sum_c \sum_{i,\alpha} M_{i\alpha,c} p_{i\alpha} (L_c - L'_c) \end{aligned} \quad (D1)$$

wobei die Klammersetzung andeutet, wie die Differentialoperatoren $p_{i\alpha}$ wirken. Schrittweise unter nochmaliger Ersetzung von $p_{i\alpha}$ durch (III.3) erhält man:

$$1. \quad \sum_c \left(\sum_{i,\alpha} p_{i\alpha} R_{c\alpha} \right) p'_{ic} = \sum_{i,\alpha} M_{i\alpha,D} \{ (L_D - L'_D) R_{c\alpha} \} p'_{ic} =$$

$$= \frac{\hbar}{i} \tilde{G}^{-1} \left\{ -\frac{1}{2} (I_2 - I_3) N'_{11} + \frac{1}{2} (I_3 - I_1) N'_{22} - \frac{1}{2} (2I_3 - I_1 - I_2) N'_{33} \right. \quad (D2)$$

$$\left. + \tan \vartheta_y (I_3 - I_1) \sum x'_{i3} p'_{i1} - \tan \vartheta_y I_{12} \sum x'_{i3} p'_{i2} \right\}$$

$$2. \quad \sum_c R_{c\alpha} \sum_{i,\alpha} p_{i\alpha} p'_{ic} = \sum_{i,c} p_{ic}^2 + \sum_{i,\alpha} R_{c\alpha} M_{i\alpha,D} (L_D - L'_D) p'_{ic} =$$

$$= \sum_{i,c} p_{ic}^2 - \frac{\hbar}{i} \frac{1}{2} \left\{ \tilde{G}^{-1} (I_2 - I_3) + \tilde{G}_0 \tilde{G} (I_2 + I_3) \right\} N'_{11}$$

(D3)

$$+ \frac{\hbar}{i} \frac{1}{2} \left\{ \tilde{G}^{-1} (I_3 - I_1) - \tilde{G}_0 \tilde{G} (I_1 + I_3) \right\} N'_{22} - \frac{\hbar}{i} \frac{1}{2} \left\{ \tilde{G}^{-1} (2I_3 - I_1 - I_2) + \tilde{G}_0 \tilde{G} (2I_3 + I_1 + I_2) \right\} N'_{33}$$

$$+ \frac{\hbar}{i} I_{12} (\tilde{G}_0 \tilde{G} + \tilde{G}^{-1}) N'_{12} + \frac{\hbar}{i} \tan \vartheta_y \tilde{G}^{-1} \left\{ (I_3 - I_1) \sum x'_{i1} p'_{i3} - I_{12} \sum x'_{i2} p'_{i3} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad \sum_c \left(\sum_{i,a} p_{ia} M_{ia,c} \right) (L_c - L'_c) &= \sum_{\substack{i,a \\ c,b}} M_{ia,b} \{ (L_b - L'_b) M_{ia,c} \} (L_c - L'_c) = \\
 &= \frac{\hbar}{i} \tan \delta_y G^{-2} I_{12} \{ -G_{23} + 2 I_3 (I_2 - I_3) \} (L_1 - L'_1) - \\
 &- \frac{\hbar}{i} \tan \delta_y G^{-2} \{ G_{23} (I_3 - I_1) + 2 I_3 I_{12} \} (L_2 - L'_2)
 \end{aligned} \tag{D4}$$

$$4. \quad \sum_c \sum_{i,a} M_{ia,c} p_{ia} (L_c - L'_c) = \sum_{\substack{i,a \\ c,b}} M_{ia,c} M_{ia,b} (L_b - L'_b) (L_c - L'_c) \tag{D5}$$

(D2) bis (D5) in (D1) eingesetzt ergibt die gesamte kinetische Energie (III.31) bis (III.33).

Die Umformung der kinetischen Energie T_{rot}

In (III.33) wird $(L_A - L'_A)$ durch die entsprechenden Ausdrücke (III.26) ersetzt. Beachtet man die Beziehungen (C9), (C11), (C12) und (C14), so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{A,B} Q_{AB} (L_A - L'_A) (L_B - L'_B) &= \frac{\hbar}{i} \tan \delta_y Q_{11} (L_2 - L'_2) - \frac{\hbar}{i} \tan \delta_y Q_{12} (L_1 - L'_1) \\
 &+ \frac{\hbar}{i} \tan \delta_y \frac{G^{-2}}{m} (I_1 I_2 - I_3^2 - I_{12}^2) \{ (I_3 - I_1) (L_2 - L'_2) + I_{12} (L_1 - L'_1) \} \\
 &+ \frac{1}{2m} G_0^{-1} G_1 \{ (I_1 + I_3) N_1^2 + (I_2 + I_3) N_2^2 - I_{12} (N_1 N_2 + N_2 N_1) \}
 \end{aligned} \tag{D6}$$

Der Kommutator $[\tilde{H}_{\text{in}}, L'_3] = 0$

Zunächst einmal erkennt man, daß $\tilde{V}_{\text{in}}$ aus (III.40) mit L'_3 kommutiert, da nach (C9) $L'_3 (I_1 + I_2) = 0$ und $L'_3 I_3 = 0$ ist. Aus (III.3) berechnet man sich die Beziehung

$$p_{iA}^1 = p_{iA} - \frac{1}{A} P_A - \sum_a R_{Aa} \sum_c M_{ia,c} (L_c - L'_c) \tag{D7}$$

mit deren Hilfe man den Kommutator

$$K^A = p_{iA}' L_3' - L_3' p_{iA}' \quad (D8)$$

auswerten kann. Es ergibt sich

$$K^1 = p_{i2}', \quad K_2 = -p_{i1}', \quad K_3 = 0 \quad (D9)$$

Es läßt sich mit (D9) der Kommutator des ersten Terms $\sum_{iA} p_{iA}'^2$ von $\tilde{T}_{in}$ aus (III.32) mit L_3' berechnen:

$$\sum_{iA} \{ p_{iA}'^2 L_3' - L_3' p_{iA}'^2 \} = \sum_{iA} \{ K^A p_{iA}' + p_{iA}' K^A \} = 0 \quad (D10)$$

Man erkennt, daß auch der Kommutator der restlichen Terme von $\tilde{T}_{in}$ mit L_3' verschwindet, wenn man die folgenden Beziehungen ableitet:

$$\begin{aligned} N_{11}' L_3' - L_3' N_{11}' &= 2 N_{12}' & N_{22}' L_3' - L_3' N_{22}' &= -2 N_{12}' \\ N_{33}' L_3' - L_3' N_{33}' &= 0 & N_{12}' L_3' - L_3' N_{12}' &= N_{22}' - N_{11}' \end{aligned} \quad (D11)$$

Bei allen Kommutatoren in diesem Abschnitt wurde ohne den Faktor $\hbar/2$ gerechnet.

Literaturverzeichnis

1. Lipkin, H.J.: Annals Phys. 9, 272 (1960)
2. Elliot, J.P.; Skyrme, T.H.R.: Proc. Roy. Soc. A 232, 561 (1955)
3. Lipkin, H.J.; de-Shalit, A.; Talmi, I.: Nuovo Cim. 2, 773
(1955)
4. Tamura, T.: Nuovo Cim. 4, 713 (1956)
5. Lipkin, H.J.: Nuovo Cim. Suppl. 4, 1147 (1956)
6. Peierls, R.E.; Yoccoz, J.: Proc. Phys. Soc. A 70, 381 (1957)
7. Halbert, E.C.; French, J.B.: Phys. Rev. 105, 1565 (1957)
8. Gartenhaus, S.; Schwartz, C.: Phys. Rev. 108, 482 (1957)
9. Lipkin, H.J.: Phys. Rev. 110, 1395 (1958)
10. Unna, I.; Talmi, I.: Phys. Rev. 112, 452 (1958)
11. Baranger, E.; Lee, C.W.: Nuclear Phys. 22, 157 (1961)
12. Palumbo, F.: Nuclear Phys. A 99, 100 (1967)
13. Scheid, W.: Dissertation, Universität Frankfurt a.M. (1967)
14. Scheid, W.; Greiner, W.: Annals of Phys. 48, 493 (1968)
15. Lipkin, H.J. in Proceedings of the Rehovot Conference on
Nuclear Structure, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1958
16. Lipkin, H.J. in The Many Body Problem, John Wiley and Son,
New York 1958
17. Hill, D.L.; Wheeler, J.A.: Phys. Rev. 89, 1102 (1953)
18. Yoccoz, J.: Proc. Phys. Soc. A 70, 388 (1957)
19. Thouless, D.J.; Peierls, R.E.: Nuclear Phys. 38, 154 (1962)
20. Zeh, H.D.: Z.Phys. 188, 361 (1965)
21. Rouhaninejad, H.; Yoccoz, J.: Nucl. Phys. 78, 353 (1966)
22. Kolb D.; Scheid, W.; Frankfurt a.M.: private Mitteilung
23. Villars, F.: Nuclear Phys. 3, 240 (1957)
24. Villars, F.: Annual Rev. of Nucl. Science 7, 185 (1957)
25. Villars, F.: Annals of Phys. 5, 224 (1958)
26. Faessler, A.; Greiner, W.: Z.Phys. 168, 425 (1962)
27. Faessler, A.; Greiner, W.: Z.Phys. 170, 105 (1962)
28. Faessler, A.; Greiner, W.: Z.Phys. 177, 190 (1964)
29. Faessler, A.; Greiner, W.; Sheline, R.K.: Nuclear Phys. 70,
33 (1965)

30. Eisenberg, J.M.; Greiner, W.: Nuclear Theory Vol.1
North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, to be published
31. Nataf, R.: Nucl. Phys. 2, 497 (1957)
32. Nilsson, S.G.: Mat.Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 29 No. 16
(1955)
33. Gustafson, C.; Lamm, I.L.; Nilsson, B.; Nilsson, S.G.:
Arkiv f. Fysik 36, No. 69 (1966)
34. Rassey, A.J.: Phys. Rev. 109, 949 (1958)

Meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. Greiner, danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für sein starkes und stetes Interesse an diesem Thema, welches zu vielen anregenden Diskussionen und zum Gelingen dieser Arbeit führte.

Allen meinen Kollegen, insbesondere aber Herrn D. Kolb und Herrn W. Scheid, möchte ich für ihre stete Bereitschaft zu klärenden Diskussionen und anregenden Erörterungen danken.

Weiterhin gilt mein Dank dem Deutschen Rechenzentrum in Darmstadt und dem Zentralen Recheninstitut der Universität Frankfurt a.M., welche mir in großzügiger Weise Rechenzeit zur Verfügung stellten.

Für die freundliche Hilfe bei der Fertigstellung der Zeichnungen danke ich Frau Utschig. Insbesondere danke ich meiner lieben Frau für die Anfertigung des Manuskriptes.

Lebenslauf

Am 28.12.1941 wurde ich in Plauen/Vogtland als Sohn des Meteorologen Dr. Otto Fink und seiner Ehefrau Erika, geb. Bäs lack, geboren. Im Sommer 1947 zogen wir in den westlichen Teil Deutschlands. Im Herbst 1948 wurde ich in der Grundschule in Mörfelden/Hessen eingeschult. Ab Ostern 1952 besuchte ich das Realgymnasium in Groß-Gerau, ein Jahr später die Helmholtzschule in Frankfurt a.M., an der ich 1961 die Reifeprüfung ablegte. Im Sommersemester des gleichen Jahres begann ich an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt a.M. mit dem Studium der Physik und legte hier im Herbst 1963 die Vordiplomprüfung ab. Nach einem Semester Studium in Hamburg kehrte ich nach Frankfurt zurück und begann unter Leitung von Prof. W. Greiner meine Diplomarbeit. Im Februar 1967 bestand ich meine Diplomprüfung. Seit dem dritten Semester bis zu meinem Diplom war ich Mitglied der Studienstiftung des Deutschen Volkes. Seit dem Sommer 1967 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Theoretische Physik an der Universität Frankfurt a.M. tätig.

Meine akademischen Lehrer waren Prof. Dr. E. Behrens, Prof. Dr. H. Dänzer, Prof. Dr. W. Franz, Prof. Dr. W. Greiner, Prof. Dr. B. Mrowka, Prof. Dr. G. Süßmann und Prof. Dr. E. Schopper.

